# 序

本卷是著者的"抽象代数学"三卷中的第二卷．要理解本卷的內容，对第一卷里所述的羣、环、域、同态等基本概念必須有一定程度的熟悉．但我們曾試使綫性代数的叙述与第一卷的細节知識无关，有时列出特殊結果的参考文献，但若干必需的基本概念則予重述． 一句話，我們希望对数学有充分修养及对近世代数的基本概念熟悉的讀者能完全理解地讀完这卷．

本卷着重于抽象概念方面；但时常与这个观点有些出入．形式的計算方法有时給出更明确的結果．再則綫性代数的結果自身不是一个終点，而是用在数学及其应用的各分支的主要工具．所以，掌握构造性的而且可用于数值問題的方法是有用的．这些方法有时需要較长的討論，但我們觉得照所指陈的理由来看，它們的提出是正确的． 对于抽象代数很熟練的讀者无疑地会看清捷径的．有些方法則見于脚註中．

书中含有大量习題，很多是用簡单数字說明理論的．其它是难題，用以考驗优秀的讀者． 无論如何，要对本卷內容懂得透澈，細心研究这些习題是必要的．

本卷編写的各阶段中，曾利用許多朋友的意見和評論；特别感謝克里福得(A. H. Clifford)、霍赤才得(G. Hochschild)及卡浦兰斯基(I. Kaplansky)关于本卷早期論述的各种建議． 我也大大地感謝三年級同学米勒斯(W. H. Mills)的辛苦地协助証明及关于本卷最后修改的各种建議．

賈柯勃遜

1952年9月于新哈文(New Haven, Conn.)

# 目 录

# 第 一 章

## 有限維向量空間

向量在三維解析几何学里是按几何性质来定义的．这里无須重提．从代数观点来説，主要事实是：向量 $v$ 乃由它(关于一定坐标系)的三个坐标$(\xi, \eta, \zeta)$完全确定．习惯上記作 $v=(\xi,\eta,\zeta)$，意味着：$v$ 是这样的向量，它的 $x$-, $y$-及 $z$-坐标順序为 $\xi, \eta$, 及 $\zeta$．反过来，实数的任意有序三元組$(\xi, \eta, \zeta)$决定一个一定向量．所以在 3-空間里，向量与实数的有序三元組間存在着 1—1 对应．

几何学里关于向量有三个基本运算：向量的加法，向量与純量(数)的乘法，向量的数积．这里也无須再提这些合成的几何定义，只要説明在三元組上与几何运算对应的代数方法就够了．如果 $v=(\xi,\eta,\zeta)$ 及 $v'=(\xi', \eta', \zeta')$，則和

$$v+v'=(\xi+\xi', \eta+\eta', \zeta+\zeta').$$

向量 $v$ 与实数 $\rho$ 的积 $\rho v$ 是向量

$$\rho v=(\rho\xi, \rho\eta, \rho\zeta),$$

而 $v$ 与 $v'$ 的純量积$(v, v')$是实数

$$(v, v')=\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta'.$$

解析几何学的主要部分——綫性相关論及綫性变换論——只与这些概念中的前两者有关．正是这个部分(的扩张形状)构成本书討論的主要論題．純量积的概念是一种度量概念，在我們的討論中将放在次要地位．

向量关于加法及用数乘的乘法可有两个扩张方向．一个是：我們的考虑无須限制于三元組，而是对于任意正整数 $n$ 来观察 $n$ 元組．另一个是：我們无須假定坐标 $\xi, \eta, \cdots$ 是实数．要保証綫性相关論的有效，我們只須假定有理运算能够施行；因此可用任意

域来代替实数域．不仅如此，我們还不难进一步把基础数系的可交换性的假設摘去．

所以我們的討論从一个給定的可除环 $\Delta$ 出发；例如，$\Delta$ 可取下列的任意一个数系：1) 实数域，2) 复数域，3) 有理数域，4) 模 $p$ 下的剩余域，或 5) 实四維数的可除环．

令 $n$ 是一个固定的正整数，并且令 $\Delta^{(n)}$ 表 $n$ 元組 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的全体，这里 $\xi_i \in \Delta$．这些 $n$ 元組叫做**向量**，而 $\Delta^{(n)}$ 叫做 $\Delta$ **上 $n$ 元組的向量空間**．如果 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$，则 $x = y$ 必須而且只須 $\xi_i = \eta_i (i = 1, 2, \cdots, n)$．仿照三維实空間情形，我們在 $\Delta^{(n)}$ 里引入两个合成：向量的加法及以 $\Delta$ 的元乘向量的乘法．首先，如果 $x$ 及 $y$ 是任意向量，我們定义它們的**和** $x+y$ 为向量

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \cdots, \xi_n + \eta_n).$$

关于以 $\Delta$ 的元乘向量的乘法有两种可能：一种是由

$$\rho x = (\rho\xi_1, \rho\xi_2, \cdots, \rho\xi_n)$$

定义的**左乘法**，另一种是由

$$x\rho = (\xi_1\rho, \xi_2\rho, \cdots, \xi_n\rho)$$

定义的**右乘法**．这两种中的任意一种都可使用，得出的理論是平行的．但此后我們只采用左乘法，得出的所有結果都可轉变为右乘法上結果，这是不待贅言的．

本书的前八章是討論在上面定义的合成下的代数系 $\Delta^{(n)}$．我們采用公理的方法，亦即从列举作为代数系 $\Delta^{(n)}$ 的公理的簡单性質来导出所有結果．这些公理定义一个**有限維(抽象)向量空間**的概念，而代数系 $\Delta^{(n)}$ 是这种空間的例子．不但如此，我們还会知道，有限維向量空間的任意其它例子实际上都与一个代数系 $\Delta^{(n)}$ 等价．

所以，采取公理的观点不是受着导致一般化的愿望的推动，目的还是在于集中注意去弄明白这些代数系的实际性質，以便把結果容易应用于其它具体例子中．着眼点的放寬最后自然导致在討論向量空間里有用的其它更一般概念的考究．这些概念中最重要的是模的概念，它成为单一綫性变换論(第三章)的主要工具．为

着对于这种应用做好准备，这里从討論一开始即将叙述这个概念.

本章的目的在給向量空間論奠定基础. 要討論的主要概念有：基，綫性相关，子空間，商空間及子空間的格.

**1. 抽象向量空間** 今列出 $\Delta^{(n)}$ 里合成的性质于次，这些代数系的整个理論都可由此导出：

A1 $$(x+y)+z=x+(y+z).$$

A2 $$x+y=y+x.$$

A3 有一个元素 0 存在，使对于一切 $x$ 有 $x+0=x$.

A4 对于任意向量 $x$ 有一个向量 $-x$ 存在，使 $x+(-x)=0$.

S1 $$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y.$$

S2 $$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x.$$

S3 $$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x).$$

S4 $$1x=x.$$

F 存在着有限个向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，使所有向量都有一种方法，并且只有一种方法写成 $\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n$ 的形状.

A1, A2, S1—S4 可以直接驗証. A3 可由观察 $(0, 0, \cdots, 0)$ 具有所需的性质而得証明. A4 可由观察：如果 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，则可取 $-x=(-\xi_1, -\xi_2, \cdots, -\xi_n)$ 而得証明. 要証 F，我們取 $e_i$ 为

(1) $$e_i=(0, 0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0), \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

于是，$\xi_ie_i$ 的第 $i$ 位置是 $\xi_i$，而其余坐标是 0. 因此 $\sum_1^n \xi_ie_i=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$. 所以，如果 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，则 $x$ 可写成向量 $e_i$ 的"綫性組合" $\sum\xi_ie_i$. 这个关系还指出：如果 $\sum\xi_ie_i=\sum\eta_ie_i$，则 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$. 从而 $\xi_i=\eta_i (i=1, 2, \cdots, n)$，这就肯定了 F 里的唯一性.

性质 A1—A4 説明：$\Delta^{(n)}$ 在加法合成下是交换羣. 性质 S1—S4 是用 $\Delta$ 的元作乘法及这个合成与加法合成間的关系的性质. 性质 F 是有限性基本条件.

今用这些性质来定义一个**抽象向量空間**. 抽象向量空間是一

个代数系，由 1) 一个交换羣 $\mathfrak{R}$（它的合成記作 +），2) 一个可除环 $\Delta$ 及 3) 对于所有二元組 $(\rho, x)$ 定义的一个函数所組成，这里 $\rho \in \Delta$, $x \in \mathfrak{R}$，而这个函数的值 $\rho x \in \mathfrak{R}$，并且适合 S1—S4. 仿照 $n$ 元組的几何情形，我們把 $\mathfrak{R}$ 的元称为**向量**，而 $\Delta$ 的元叫做**純量**. 在討論中，通常重点放在 $\mathfrak{R}$ 上，因此就用不很严格的説法，叫 $\mathfrak{R}$ 做"可除环 $\Delta$ 上向量空間". （严格地說，$\mathfrak{R}$ 只是向量空間的羣的部分）. 如果于其它假設外，F 也成立，我們說 $\mathfrak{R}$ 是**有限維的**，或 $\mathfrak{R}$ **在 $\Delta$ 上拥有有限基**.

由 $\Delta^{(n)}$, $\Delta$ 及上面定义的乘法 $\rho x$ 所构成的代数系是有限維向量空間的一个例子. 下面我們将要叙述环論里产生向量空間的一个情况. 令 $\mathfrak{R}$ 是带恆等元素 1 的一个任意环，并且假設 $\mathfrak{R}$ 含有一个可除环 $\Delta$，这个环含有 1. 当 $\rho \in \Delta$ 而 $x \in \mathfrak{R}$ 时，我們取环的积 $\rho x$ 为积 $\rho x$；于是，S1—S3 是乘法的分配律与結合律的結果，并且因为 $\Delta$ 的恆等元素就是 $\mathfrak{R}$ 的恆等元素，所以 S4 成立. 于是，加法羣 $\mathfrak{R}$，可除环 $\Delta$ 及乘法 $\rho x$ 构成一个向量空間. 这个空間可以是有限維的，也可以不是有限維的. 例如，如果 $\mathfrak{R}$ 是复数域，而 $\Delta$ 是实数子域，則 $\mathfrak{R}$ 是有限維的；这因为任意复数可借"向量" 1, $\sqrt{-1}$ 有一种方法而且只有一种方法写成 $\xi+\eta\sqrt{-1}$ 的形状. 这种类型的另一个例子是 $\mathfrak{R}=\Delta[\lambda]$，它是系数在可除环 $\Delta$ 上含有超越元素（不定量）$\lambda$ 的多項式环. 我們将会知道，这个向量空間不是有限維的（参看习題 3 的第 1 題）. 同样，我們可把多項式环 $\Delta[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$ 看作一个 $\Delta$ 上向量空間，这里 $\lambda_i$ 是代数无关元素（或无关不定量）.

向量空間的其它例子可由上面定义的各个空間的子空間得出. 令 $\mathfrak{R}$ 是 $\Delta$ 上任意向量空間，并且令 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子集合，它是一个子羣，并且在 $\Delta$ 的元素的乘法下封閉，这就是說：如果 $y \in \mathfrak{S}$，并且 $\rho$ 是 $\Delta$ 里任意元素，則 $\rho y \in \mathfrak{S}$. 于是，$\mathfrak{S}$, $\Delta$ 及乘法 $\rho y$ 构成的代数系显然是一个向量空間；这因为 S1—S4 在 $\mathfrak{R}$ 里成立时，在子集合 $\mathfrak{S}$ 里显然也成立. 我們把它叫做給定向量空間 $\mathfrak{R}$ 的一个**子空間**，并且也不严格地把 $\mathfrak{S}$ 叫做 $\mathfrak{R}$ 的一个子空間. 例

如，令 $\mathfrak{R}=\Delta[\lambda]$，并且令 $\mathfrak{S}$ 是次数 $<n$ 的多項式所成的子集合，則易見 $\mathfrak{S}$ 是一个子空間．因为次数 $<n$ 的任意多項式有一种方法而且只有一种方法用多項式 $1, \lambda, \cdots, \lambda^{n-1}$ 的綫性組合表出，所以 $\mathfrak{S}$ 是有限維的．

### 習 題 1

1. 証明：二次齐次多項式 $\sum_{i\leq j}\alpha_{ij}\lambda_i\lambda_j(\alpha_{ij}\in\Delta)$ 的全体 $\mathfrak{S}$ 是 $\Delta[\lambda_1, \lambda_2]$ 的一个有限維子空間．

**2. 右向量空間**　在本章开始时，我們已指出 $n$ 元組的代数系 $\Delta^{(n)}$ 也可以对于加法及用純量右乘的乘法来討論，这就引导我們来定义右向量空間的概念．右向量空間是由一个交換羣 $\mathfrak{R}'$，一个可除环 $\Delta$ 及二元組 $(\rho, x')$ 的一个函数构成，这里 $\rho\in\Delta$，$x'\in\mathfrak{R}'$，这个函数的值 $x'\rho\in\mathfrak{R}'$，并且适合

S′1　　$(x'+y')\alpha=x'\alpha+y'\alpha.$

S′2　　$x'(\alpha+\beta)=x'\alpha+x'\beta.$

S′3　　$x'(\alpha\beta)=(x'\alpha)\beta.$

S′4　　对于所有 $x'\in\mathfrak{R}'$，$x'1=x'$．

根据这个定义得来的理論显然与左向量空間的理論是平行的．但要知道，如果可除环 $\Delta$ 不是交換环，則 $\Delta$ 上右向量空間就不能看作一个 $\Delta$ 上左向量空間．这因为，如果用 $\alpha x'$ 代替 $x'\alpha$，則由 S′3 得

$$(\alpha\beta)x'=x'(\alpha\beta)=(x'\alpha)\beta=\beta(\alpha x').$$

因此要 S3：$(\beta\alpha)x'=\beta(\alpha x')$ 成立，只能对于一切 $x'$ 有

$$[(\alpha\beta)-(\beta\alpha)]x'=0.$$

由这个結果及 S4 可推出：$\alpha\beta=\beta\alpha$ 对于所有 $\alpha, \beta$ 成立．

另一方面，令 $\Delta'$ 是与 $\Delta$ 反同构的一个可除环，并且令 $\alpha\to\alpha'$ 是 $\Delta$ 到 $\Delta'$ 上的任意反同构．如果 $\mathfrak{R}'$ 是 $\Delta$ 上一个右向量空間，則 $\mathfrak{R}'$ 可看作 $\Delta'$ 上一个左向量空間．这可由規定 $\alpha'x'$ 就是 $x'\alpha$ 而得出．此时，

$$(\alpha'\beta')x'=(\beta\alpha)'x'=x'(\beta\alpha)=(x'\beta)\alpha=(\beta'x')\alpha=\alpha'(\beta'x'),$$

故能适合 S3. 其它法則也可直接驗証.

**3. o-模** 在着手系統的討論有限維向量空間前，我們要簡短地就扩充为模来講一下，这在此后是极有用的. 这种推广是在定义內用带恆等元素的任意环 o 代替可除环 Δ. 所以，我們定义一个(左) o-模为一个代数系，由一个交換羣 $\mathfrak{R}$，一个带恆等元素的环 o 及二元組$(\rho, x)$的一个函数构成，这里 $\rho \in \mathfrak{o}$, $x \in \mathfrak{R}$，而函数的値 $\rho x \in \mathfrak{R}$，并且适合 S1—S4[1]. 由这个定义显見向量空間只是一个 Δ-模，这里 Δ 是一个可除环.

在向量空間这一特殊情形外，下面叙述 o-模的一个重要例子：令 $\mathfrak{R}$ 是(用加法合成的)任意交換羣，并且令 o 是整数环. 如果 $x \in \mathfrak{R}$，而 $\alpha \in \mathfrak{o}$，我們定义

$$\alpha x = \begin{cases} x + x + \cdots + x, \text{这里 } \alpha > 0, \text{有 } \alpha \text{ 項}; \\ 0, \text{这里 } \alpha = 0; \\ -(x + x + \cdots + x), \text{这里 } -\alpha > 0, \text{有 } -\alpha \text{ 項}. \end{cases}$$

于是，S1—S4 是熟知的 $\mathfrak{R}$ 里倍数律.

我們也知道，带恆等元素的任意环 o 可看作一个 o-模，这时取 o 的加法羣为羣的部分 $\mathfrak{R}$，并定义 $ax(a \in \mathfrak{o}, x \in \mathfrak{R})$为环的积. 性質 S1—S4 是乘法的結合律、分配律及恆等元素律的直接結果.

如向量空間情形一样，如果模 $\mathfrak{R}$ 的子集合 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子羣，关于以 o 的随意元素所作的乘法是封閉的，則 $\mathfrak{S}$ 決定一个子模. 今令 $S = (x_\alpha)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个随意子集合，并令$[S]$表示如

$$\xi_1 x_{\alpha_1} + \xi_2 x_{\alpha_2} + \cdots + \xi_m x_{\alpha_m} \tag{2}$$

形式的和的全体，这里 $\xi_i$ 是 o 里的随意元素，而 $x_{\alpha_i}$ 是 $S$ 里的随意元素，我們断定 $[S]$ 是一个子模. 显然 $[S]$ 在加法下及用 o 的元素作乘法下是封閉的. 我們也易知(习題 2 的第 1 題)：$0x = 0$ 及 $(-\xi)x = -\xi x$ 在任意模里成立，且可推得 $[S]$ 含有 0 及 $[S]$ 里任意元素的負元素. 故 $[S]$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子模. 我們还知道，$[S]$

---

1) 这个定义与通常的定义稍有出入的地方是在于：通常定义內 o 不必带恆等元素，而只假定适合 S1—S3. 由于本书只着重带有恆等元素的环，所以这里作这样的改变. 右 o-模显然可由以 S'1—S'4 代替 S1—S4 而得.

含有 $S$ 的元素 $x_\alpha = 1x_\alpha$,并且 $\mathfrak{R}$ 里含有 $S$ 的每个子模都含有 $[S]$. 由于这些性质,我們說: $[S]$ 是由集合 $S$ 生成的子模.

如果 $[S] = \mathfrak{R}$, 則集合 $S$ 叫做 $\mathfrak{R}$ 的一个生成元素集合. 如果对于某个有限集合 $S = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$, $\mathfrak{R} = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$, 則說 $\mathfrak{R}$ 是有限生成的模. 如果有一个生成元素集合 $S$ 存在,使每个 $x$ 有一个而且只有一个方法写成形状 $\sum \xi_i e_{\alpha_i}$,$(e_{\alpha_i} \in S)$,則 $\mathfrak{R}$ 叫做一个自由模,而集合 $S$ 叫做一个基. 因此,条件 F 說明:一个有限維向量空間是带有有限基的一个自由 $\Delta$-模.

对于任意的 $n$, 容易作出带有 $n$ 个基元素的一个自由 $\mathfrak{o}$-模; 它的作法与 $\Delta^{(n)}$ 的作法相同. 令 $\mathfrak{o}^{(n)}$ 表示 $n$ 元組$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$的全部, 这里 $\xi_i \in \mathfrak{o}$. 加法及用 $\mathfrak{o}$ 的元素作的乘法都与前面的定义相同. 如果 $e_i$ 用(1)来定义,則也象 $\Delta^{(n)}$ 的情形,可以看到这些元素是 $\mathfrak{o}^{(n)}$ 的一个基.

今就 $\mathfrak{o}$-模叙述等价的基本概念. 令 $\mathfrak{R}$ 及 $\bar{\mathfrak{R}}$ 是对于同一个环 $\mathfrak{o}$ 定义的两个 $\mathfrak{o}$-模. 如果有 $\mathfrak{R}$ 到 $\bar{\mathfrak{R}}$ 上的一个 1—1 对应 $x \to \bar{x}$ 存在,使

$$(3) \qquad \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}, \quad \overline{\alpha x} = \alpha \bar{x},$$

則說 $\mathfrak{R}$ 与 $\bar{\mathfrak{R}}$ 是 $\mathfrak{o}$-同构的,或仅說等价的. 因此, $x \to \bar{x}$ 是羣 $\mathfrak{R}$ 与 $\bar{\mathfrak{R}}$ 間一个同构, 对于所有 $\alpha$ 与 $x$ 适合 $\overline{\alpha x} = \alpha \bar{x}$. 这样一个映照叫做一个 $\mathfrak{o}$-同构或等价.

如果 $x = \sum \alpha_i e_i$,則由(3)得

$$\bar{x} = \overline{\sum \alpha_i e_i} = \sum \overline{\alpha_i e_i} = \sum \alpha_i \bar{e}_i.$$

所以,如果元素 $e_i$ 是 $\mathfrak{R}$ 的生成元素,則对应元素 $\bar{e}_i$ 是 $\bar{\mathfrak{R}}$ 的生成元素. 如果 $\sum \alpha_i \bar{e}_i = \sum \beta_i \bar{e}_i$, 則 $\sum \alpha_i e_i = \sum \beta_i e_i$. 由此可見,如果 $\mathfrak{R}$ 是带有基 $e_i$ 的一个自由模, 則 $\bar{\mathfrak{R}}$ 是带有基 $\bar{e}_i$ 的自由模. 这些論述解释了等价模有相同性質的一般原理, 故在討論中毋須加以区别.

今設 $\mathfrak{R}$ 及 $\bar{\mathfrak{R}}$ 是两个自由 $\mathfrak{o}$-模, 并設这两个模的基元素都有 $n$ 个. 令 $\mathfrak{R}$ 的基是 $e_1, e_2, \cdots, e_n$,而 $\bar{\mathfrak{R}}$ 的基是 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n$. 如果 $x$ 是 $\mathfrak{R}$ 的任意元素, 写出 $x = \sum \xi_i e_i$, 并把它与 $\bar{\mathfrak{R}}$ 的元素 $\bar{x} =$

$\sum\xi_i\bar{e}_i$ 对应起来. 因为 $e_i$ 及 $\bar{e}_i$ 都是基, 所以这个对应是 $\mathfrak{R}$ 到 $\bar{\mathfrak{R}}$ 上的 1—1 对应. 此外, 如果 $y=\sum\eta_i e_i$, 则 $\bar{y}=\sum\eta_i\bar{e}_i$; 由于 $x+y=\sum(\xi_i+\eta_i)e_i$,故

$$\overline{x+y}=\sum(\xi_i+\eta_i)\bar{e}_i=\sum\xi_i\bar{e}_i+\sum\eta_i\bar{e}_i=\bar{x}+\bar{y}.$$

还有

$$\overline{\alpha x}=\sum(\alpha\xi_i)\bar{e}_i=\alpha\sum\xi_i\bar{e}_i=\alpha\bar{x}.$$

所以, $\mathfrak{R}$ 与 $\bar{\mathfrak{R}}$ 等价. 这証明了下面的定理.

**定理 1.** 有 $n$ 个基元素的任意兩个自由 $\mathfrak{o}$-模是等价的.

特别是,我們知道,有 $n$ 个基元素的任意有限維向量空間等价于 $n$ 元組的空間 $\Delta^{(n)}$. 这証明了前面的断言: 有限維向量空間的研究与具体代数系 $\Delta^{(n)}$ 的研究是等价的[1].

### 習 題 2

1. 証明下列关于任意 $\mathfrak{o}$-模的法則: 1) $\alpha 0=0$, 2) $\alpha(-x)=-\alpha x$, 3) $0x=0$, 4) $(-\alpha)x=-\alpha x$.

2. 証明:如果 $\mathfrak{o}$-模的任意子集合关于加法及用 $\mathfrak{o}$ 的元素作的乘法封閉,则这个子集合是一个子模.

3. 証明:如果 $\mathfrak{R}$ 是一个向量空間,則 $\alpha x=0$ 必須 $\alpha=0$ 或 $x=0$.

**4. 綫性相关** 从現在起, 除非另作声明外, $\mathfrak{R}$ 总是表示带有基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的 $\Delta$ 上一个有限維向量空間. 我們易知, $\mathfrak{R}$ 的基不是唯一决定的. 例如, $e_1+e_2, e_2, e_3, \cdots, e_n$ 是另一个基, 并且如果 $\alpha\neq 0$,則 $\alpha e_1, e_2, \cdots, e_n$ 也是一个基. 下一节我們要証的一个基本定理是:任意一个基里向量的个数都相同. 所以个数 $n$ 是不变的, 我們叫它做 $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}$ 的**維数**. 为着給这个定理的証明作出必要的准备,今来討論向量的綫性相关这一个基本概念.

如果 $S$ 是向量的一个集合, 而向量 $x\in[S]$, 我們說 $x$ 是**綫性依賴于** $S$. 这等价于說: $\Delta$ 里有适宜的 $\xi_i$ 与 $S$ 里有适宜的 $x_i$ 使 $x=\sum_1^m\xi_i x_i$. 这証明了下列綫性相关的显著性质中的第一个:

1) 如果 $x$ 是綫性依賴于 $S$, 則 $x$ 是对于 $S$ 的一个有限子集合綫性

---

1) 模論的較完备敍述, 見本书第一卷的第六章. 但这里的討論适合于当前的目的.

相关的; 2) $x$ 是綫性依賴于集合 $S=(x)$; 3) 如果 $x$ 是綫性依賴于 $S$,而 $T$ 是含有 $S$ 的一个集合,則 $x$ 是綫性依賴于 $T$; 4) 如果 $x$ 是綫性依賴于 $S$,并且每个 $x_a \in S$ 是綫性依賴于集合 $T$;則 $x$ 是綫性依賴于 $T$.

如果对于向量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$,在 $\Delta$ 里有不全为 0 的 $\beta_i$ 存在使 $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_m x_m = 0$,則說 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是綫性相关的. 因为 $\beta x = 0$ 的充要条件是 $\beta = 0$ 或 $x = 0$,所以由单独一个向量 $x$ 构成的集合是綫性相关的充要条件是 $x=0$. 如果 $m>0$,而 $x_i$ 是綫性相关的,則可假設其中一个系数,譬如 $\beta_m \neq 0$. 于是,

$$x_m = -\beta_m^{-1} \sum_1^{m-1} \beta_j x_j = \Sigma(-\beta_m^{-1})\beta_j x_j,$$

因而 $x_m$ 是綫性依賴于 $(x_1, x_2, \cdots, x_{m-1})$. 反过来,如果 $x_m$ 是綫性依賴于 $(x_1, x_2, \cdots, x_{m-1})$,則向量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是綫性相关的. 故含有一个以上向量的集合是綫性相关的集合必須而且只須集合里有一个向量是綫性依賴于其余向量. 如果 $r \leqslant m$,并且 $x_1, \cdots, x_r$ 是一个綫性相关的集合,則 $x_1, \cdots, x_m$ 也是一个綫性相关的集合. 这因为,如果 $\sum_1^r \beta_i x_i = 0$,則在取 $\beta_{r+1} = \cdots = \beta_m = 0$ 时,也有 $\sum_1^m \beta_j x_j = 0$.

如果 $x_1, \cdots, x_m$ 不是綫性相关的,則說这些向量是綫性无关的. 关于綫性相关的集合的最后一个性質可用下列形式来叙述:綫性无关的集合的任意非空子集合是一个綫性无关的集合. 特别是,在一个綫性无关的集合里每个向量必須 $\neq 0$.

下列性質是經常用到的,所以就作为引理.

**引理 1.** 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是綫性无關的,而 $x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}$ 是綫性相關的,則 $x_{m+1}$ 是綫性依賴于 $x_1, \cdots, x_m$.

証 因为 $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_m x_m + \beta_{m+1} x_{m+1} = 0$,其中一定有些 $\beta_k \neq 0$. 如果 $\beta_{m+1} = 0$,就推得 $x_1, \cdots, x_m$ 是綫性相关

的，这与假設矛盾．因此 $\beta_{m+1} \neq 0$．我們可就 $x_{m+1}$ 解出，而得用 $x_1, \cdots, x_m$ 表达的式子．

我們还需要下列的引理．

**引理 2.** 令 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是 $m > 1$ 个向量的集合，並且定义

$$x_i' = x_i (i = 1, 2, \cdots, m-1), \ x_m' = x_m + \rho x_1,$$

則 $x_1, \cdots, x_m$ 是綫性相關的必須而且只須 $x_1', x_2', \cdots, x_m'$ 是綫性相關的．

証　假定 $x_i$ 是綫性无关的，并且令 $\beta_i$ 是 $\Delta$ 的元素能使 $\sum \beta_i x_i' = 0$．于是，

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_{m-1} x_{m-1} + \beta_m (x_m + \rho x_1)$$
$$= (\beta_1 + \beta_m \rho) x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_m x_m = 0.$$

由此得 $\beta_1 + \beta_m \rho = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0$，亦即所有 $\beta_i = 0$．这証明了 $x_i'$ 是綫性无关的．反过来，因为 $x_i = x_i' (i = 1, 2, \cdots, m-1)$，而 $x_m = x_m' - \rho x_1'$；所以，这两个向量集合間的关系是一种对称关系；因此可知：如果 $x_i'$ 是綫性无关的，則 $x_i$ 也是綫性无关的．

我們显然可把这个引理推广，而証明：如果两个集合 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 及 $x_1', x_2', \cdots, x_m'$ 里，$x_1' = x_1$，而 $x_j' = x_j + \rho_j x_1 (j = 2, \cdots, m)$，則这两个集合都是相关的集合，或都是无关的集合；这因为，我們可从第一个集合經过一系列引理 2 型的代換而得出第二个集合．

現在临到討論向量空間理論的一个基本結果：

**定理 2.** 如果 $\mathfrak{R}$ 有一組 $n$ 个向量的基，則 $\mathfrak{R}$ 里任意 $n+1$ 个向量是綫性相關的．

証　我們对于 $n$ 施行归納法証明．令 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基，并且令 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 是 $\mathfrak{R}$ 里向量．当 $n = 1$ 时，$x_1 = \alpha_1 e_1, x_2 = \alpha_2 e_1$；因此，或是 $x_1 = 0$，或是 $x_2 = \alpha_2 \alpha_1^{-1} x_1$．所以，定理成立．今設这个定理对于有 $n-1$ 个向量为基的空間已經証实．假定 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 是綫性无关的，并令

$$
(4) \quad \begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \cdots + \alpha_{1n}e_n \\
x_2 &= \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \cdots + \alpha_{2n}e_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n+1} &= \alpha_{n+1,1}e_1 + \alpha_{n+1,2}e_2 + \cdots + \alpha_{n+1,n}e_n
\end{aligned}
$$

是各个 $x$ 通过基的表达式. 我們可假定 $x_1 \neq 0$; 于是,可假定 $\alpha_1$, 中有一个 $\neq 0$,譬如說, $\alpha_{1n} \neq 0$. 則集合 $x_1', x_2', \cdots, x_{n+1}'$ 是一个綫性无关的集合,这里 $x_1' = x_1$,而 $x_j' = x_j - \alpha_{jn}\alpha_{1n}^{-1}x_1 (j > 1)$. 由此得 $x_2', x_3', \cdots, x_{n+1}'$ 是綫性无关的. 但由(4)知,这些 $x_j'$ 不含有 $e_n$, 亦即 $x_j' \in \mathfrak{S} \equiv [e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}]$. 因为 $e_i (i \leqslant n-1)$ 构成 $\mathfrak{S}$ 的一个基,这与归納法假設矛盾. 这就完成了定理的証明.

**注意** 1)因为向量的綫性无关的集合的任意非空子集合是一个綫性无关的集合,故由定理2显然可推得:带有一組 $n$ 个向量的基的空間里,任意 $r > n$ 个向量是綫性相关的.

2) 令 $S$ 是向量的集合, 并且令 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 是 $S$ 里綫性无关向量, 則或每个集合 $(x_1, x_2, \cdots, x_r, x)$ 是綫性相关的, 这里 $x \in S$,或存在一个 $x_{r+1} \in S$ 使 $(x_1, x_2, \cdots, x_{r+1})$是綫性无关的. 同理或每个集合 $(x_1, x_2, \cdots, x_{r+1}, x)$ 是綫性相关的, 这里 $x \in S$, 或存在一个 $x_{r+2} \in S$ 使 $(x_1, x_2, \cdots, x_{r+2})$ 是綫性无关的. 这样进行有限次后, 得到 $S$ 的一个綫性无关的集合 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $(x_i \in S)$,使 $S$ 的任意更大些的子集合是綫性相关的. 所以,向量的集合 $S$ 的任意綫性无关的子集合可嵌入 $S$ 的一个最大綫性无关的子集合里.

3) 定理2的証法可用以检驗給定的有限集合 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的綫性相关. 如果 $x_1 = 0$,則集合一定是相关的. 否則,我們可用 $x_1, x_2', \cdots, x_m'$ 代替这个集合,这里 $x_1$ 譬如說含有 $e_n$,而其余 $x_i'$ 就沒有含着它, 因此第二个集合是綫性无关的必須而且只須原来集合是綫性无关的. 至此,我們容易知道,因为 $x_1$ 含有 $e_n$, 而 $x_i'$ 沒有含着它,所以 $x_1, x_2', \cdots, x_m'$ 是綫性无关的必須而且只須 $x_2', x_3', \cdots, x_m'$ 是綫性无关的. 这样就把問題归結到在带有 $n-1$ 个向量的基的空間里检驗 $m-1$ 个向量的綫性相关的問題了.

## 習 題 3

1. 証明:含 $\lambda$ 的多項式构成的向量空間是无限維的.

2. 检驗下列各集合的綫性相关:

(a) $(2,-5,2,-3)$, $(-1,-3,3,-1)$, $(1,1,-1,0)$, $(-1,1,0,1)$;

(b) $(2,-3,0,4)$, $(6,-7,-4,10)$, $(0,-1,2,1)$;

(c) $(1,1,1,1)$, $(1,2,3,4)$, $(1,4,9,16)$, $(1,8,27,64)$.

3. 証明: 向量 $x_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j\ (i=1,2,\cdots,m)$ 是綫性相关的必須而且只須綫性方程組

$$\begin{aligned}&\xi_1\alpha_{11}+\xi_2\alpha_{21}+\cdots+\xi_m\alpha_{m1}=0,\\&\xi_1\alpha_{12}+\xi_2\alpha_{22}+\cdots+\xi_m\alpha_{m2}=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\xi_1\alpha_{1n}+\xi_2\alpha_{2n}+\cdots+\xi_m\alpha_{mn}=0\end{aligned}\tag{5}$$

有一个非全零解 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)\neq(0,0,\cdots,0)$. 应用这个結果証明: 系数 $\alpha_{ij}$ 是在可除环 $\Delta$ 里的任意綫性方程組(5)在 $\Delta$ 里有一个非全零解, 假定未知数的个数 $m$ 比方程的个数 $n$ 多 (使用右向量空間可就"右手"綫性方程組 $\Sigma\alpha_{ij}\xi_j=0$ 証明类似的結果).

**5. 維数的不变性** 如果 $(f)$ 是可除环 $\Delta$ 上向量空間 $\mathfrak{R}$ 里向量的一个集合, 而 $\mathfrak{R}$ 里每个向量 $x$ 可由 $(f)$ 里的适宜 $f_i$ 及 $\Delta$ 里适宜的 $\xi_i$ 表达为形式 $\Sigma\xi_if_i$, 则 $(f)$ 叫做 $\mathfrak{R}$ 的一个生成元素集合. 如果 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是一个基, 则这些元素是生成元素; 而且它們是綫性无关的, 这因为, 如果 $\Sigma\beta_ie_i=0$, 则

$$\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n=0e_1+0e_2+\cdots+0e_n.$$

由表示的唯一性知 $\beta_i=0$. 反过来, 任意有限的生成元素集合 $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$, 它們是綫性无关时, 构成一个基. 这样, 如果 $\Sigma\xi_if_i=\Sigma\eta_if_i$, 则 $\Sigma(\xi_i-\eta_i)f_i=0$. 所以, $\xi_i-\eta_i=0$, 而 $\xi_i=\eta_i(i=1,2,\cdots,m)$. 故由定理2知, 在任意基 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 里向量的个数 $m$ 不能超过 $n$. 把 $e$ 与 $f$ 对調, 得 $n\leqslant m$. 因此, $m=n$. 这証明了下列基本的定理.

**定理 3.** $\mathfrak{R}$ 的任意基含有 $n$ 个向量.

一个基里元素的个数 $n$ 既是唯一决定的, 我們叫这个数为 $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}$ 的**維数**.

我們已知, 如果 $\mathfrak{R}$ 与 $\bar{\mathfrak{R}}$ 是等价的自由 $\mathfrak{o}$-模, 则 $\mathfrak{R}$ 的任意基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 給出 $\bar{\mathfrak{R}}$ 的一个基 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n$. 所以, 等价的向量空

間有同一維数. 特别是,如果 $m \neq n$,則空間 $\Delta^{(m)}$ 与 $\Delta^{(n)}$ 不是等价的.

其次,我們証明下面的定理.

**定理 4.** 如果 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ 是綫性无關向量,則我們可从基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 里选出 $n-r$ 个向量补充到这些向量中去,而得一个基.

証 就集合 $(f_1, f_2, \cdots, f_r; e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 来說,我們可在其中选出含有 $f_i$ 的一个最大綫性无关的集合 $(f_1, f_2, \cdots, f_r; e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_h})$. 如果把任意一个 $e$ 添到这个集合中去,就得一个綫性相关的集合. 故由 §4 的引理 1 知,每个 $e_i$ 是对于集合 $(f_1, \cdots, f_r; e_{i_1}, \cdots, e_{i_h})$ 綫性相关的. 所以,任意 $x$ 是对于这个集合綫性相关的,而这个集合是一个基.

所补充的 $e$ 的个数 $h$ 是 $n-r$. 特别是,我們知道,如果 $r=n$,則 $f_i$ 构成一个基.

次設向量 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 是生成元素. 我們由这个集合里选取一个最大綫性无关的子集合,并且假定向量的記法会使这个子集合里的向量是 $f_1, f_2, \cdots, f_r$,于是,对于任意的 $i$, $(f_1, f_2, \cdots, f_r, f_i)$ 是綫性相关的集合. 所以 $f_i$ 是綫性依賴于 $f_1, f_2, \cdots, f_r$, 因此每个 $x$ 也是这样. 故这个子集合是一个基;由定理 3 知, $r=n$. 故知:生成元素的任意集合至少含有 $n$ 个元素,并且含有构成一个基的 $n$ 个元素的子集合.

## 習 題 4

1. 如果 $f_1=(1, -1, 2, 3)$, $f_2=(3, 0, 4, -2)$, 求向量 $f_3$ 及 $f_4$ 使 $f_1, f_2, f_3, f_4$ 构成一个基.

2. 在下列向量集合里求一个最大綫性无关的子集合: $(2, -3, 0, 4)$, $(-1, \frac{3}{2}, 0, -2)$, $(1, -1, 2, 1)$, $(6, -7, 8, 8)$.

3. 令 $\Delta$ 是一个可除环,証明:任意有限生成的 $\Delta$-模是一个有限維向量空間.

**6. 基及陣** 在目前討論向量的有限集合里,这些向量的次序也看作重要的;所以我們考虑有序集合. 特别是基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 与基 $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}$ 間的区别,这里 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 令 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是一个特殊有序集合,它构成

一个基，并令 $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 是任意向量的一个有序集合．命 $x_i = \sum_1^n \alpha_{ij}e_j\ (i = 1, 2, \cdots, r)$；則元素 $\alpha_{ij}$ 是唯一决定的．于是，陣

$$(6)\qquad (\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rn} \end{bmatrix}$$

由有序集合 $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 及有序基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 唯一决定．这个陣我們叫做 $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣．

这里需要引用关于陣乘法的基本动作[1]．令 $(\alpha)$ 是元素在 $\Delta$ 里的一个 $r \times n$ 陣（$r$ 行，$n$ 列）．与前面一样，我們以 $\alpha_{ij}$ 表示在第 $i$ 行与第 $j$ 列交点处（亦卽 $(i, j)$-位置）的元素．同样，令 $\beta$ 是一个 $n \times m$ 陣，它的元素 $\beta_{jk}$ 在 $\Delta$ 里．我們定义积 $(\alpha)(\beta)$ 是 $r \times m$ 陣，它的 $(i, k)$-位置的元素是

$$(7)\qquad \sigma_{ik} = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \cdots + \alpha_{in}\beta_{nk}.$$

如果 $(\gamma)$ 是元素在 $\Delta$ 里的一个 $m \times q$ 陣，則积 $[(\alpha)(\beta)](\gamma)$ 与 $(\alpha)[(\beta)(\gamma)]$ 定义为 $r \times q$ 陣，它們的 $(i, l)$-位置的元素順序为

$$\sum_{j, k} (\alpha_{ij}\beta_{jk})\gamma_{kl}, \qquad \sum_{j, k} \alpha_{ij}(\beta_{jk}\gamma_{kl}).$$

故得結合律：$[(\alpha)(\beta)](\gamma) = (\alpha)[(\beta)(\gamma)]$．

如果限制于一定大小的方陣，例如 $n \times n$ 陣，則积仍然是同类型的陣．因为結合律成立，所以这种陣的全体 $\Delta_n$ 是一个半羣．我們还易知，陣

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

是 $\Delta_n$ 里的恆等元素，它对于所有 $(\alpha) \in \Delta_n$ 适合 $(\alpha)1 = (\alpha) =$

1）参看本书第一卷的第二章中的 §4．

$1(\alpha)$. 对于一个陣 $(\alpha)$，如果存在一个 $(\beta)$ 使 $(\alpha)(\beta)=1=(\beta)(\alpha)$，則照半羣的通例叫 $(\alpha)$ 做一个单位. 这些陣也叫做 $\Delta_n$ 里的满秩陣或正則陣. 我們易証：带有一个恆等元素的任意半羣的单位的全部成一个羣[1]. 特別是，满秩陣的全体 $L(\Delta, n)$ 关于乘法是一个羣. 它也与任意羣一样，$(\alpha)$ 的逆陣 $(\beta)$ 是唯一决定的，并且按通例記作 $(\beta)=(\alpha)^{-1}$.

現在回到有限維向量空間的討論. 令 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 与 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是 $\Delta$ 上向量空間 $\mathfrak{R}$ 的两个有序基，并且与前此一样，令 $(\alpha)$ 是 $(f_i)$ 关于 $(e_i)$ 的陣. 次令 $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ 是第三个有序基，并令

$$(\beta)=\begin{bmatrix}\beta_{11}\beta_{12}\cdots\beta_{1n}\\ \beta_{21}\beta_{22}\cdots\beta_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_{n1}\beta_{n2}\cdots\beta_{nn}\end{bmatrix}$$

是 $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ 关于 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 的陣，則 $g_j=\sum\beta_{jk}f_k$. 因为 $f_k=\sum\alpha_{ki}e_i$，故

$$g_j=\sum_k\beta_{jk}f_k=\sum_{k,\,i}\beta_{jk}\alpha_{ki}e_i=\sum_i\gamma_{ji}e_i,$$

这里 $\gamma_{ji}=\sum_k\beta_{jk}\alpha_{ki}$. 这証明：$(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ 关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣是 $(\beta)$ 与 $(\alpha)$ 的积 $(\beta)(\alpha)$. 在特殊情形，如果 $g_i==e_i$，則 $(\beta)(\alpha)$ 是 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣. 因为 $e_i=e_i$，显然这个陣必須是恆等陣 1. 所以，$(\beta)(\alpha)=1$. 把 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 与 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 对調，又得 $(\alpha)(\beta)=1$. 这就証明了

**定理 5.** 任意有序基 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 關于有序基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣是满秩陣.

反过来，令 $(\alpha)$ 是 $L(\Delta, n)$ 的一个元素. 令 $(\beta)=(\alpha)^{-1}$. 定义 $f_i=\sum\alpha_{ij}e_j$，則可斷定 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是 $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}$ 的一个基.

---

1) 例如，参看本书第一卷的第一章中的 §7.

于是,元素

$$(8)\qquad \sum_i \beta_{ki}f_i=\sum_{i,j}\beta_{ki}\alpha_{ij}e_j=\sum_j \delta_{kj}e_j,$$

这里 $\delta_{kj}$ 是克伦内克(Kronecker)的 $\delta$,就是說:如果 $k\neq j$,則 $\delta_{kj}=0$,而 $k=j$,則 $\delta_{kj}=1$. 故 $\sum_i \beta_{ki}f_i=e_k$,而 $e_k$ 是对于 $f_1,\cdots,f_n$ 綫性相关的. 于是,每个 $x$ 对于 $f$ 是綫性相关的. 因此,$f_i$ 是生成元素;又因为它們的个数是 $n$,故它們构成一个基.

于是,在 $\Delta_n$ 里的不同有序基与单位間建立一个 1—1 对应. 如果 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是一个特殊有序基,則每个有序基可从 $\Delta_n$ 中取一个单位 $(\alpha)$ 并且定义 $f_i=\sum_j \alpha_{ij}e_j$ 而得出.

在右向量空間情形,显然不难把上面結果复制而得. 我們只須在右空間 $\mathfrak{R}'$ 确定 $(x_1', x_2', \cdots, x_r')$ 关于基 $(e_1', e_2', \cdots, e_n')$ 的陣的定义. 这可由写下 $x_j'=\sum_i e_i'\alpha_{ij}$,并且定义 $(x_1', x_2', \cdots, x_r')$ 关于 $(e_1', e_2', \cdots, e_n')$ 的陣为 $(\alpha)$ 就行了. 于是,此时的陣是出現于方程 $x_j'=\sum_i e_i'\alpha_{ij}$ 的陣的摺轉[1). 与前此一样,我們在不同的有序基与 $L(\Delta, n)$ 的元素間得出一个 1—1 对应.

## 習 題 5

1. 証明:如果 $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1n}), (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{2n}), \cdots, (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \cdots, \alpha_{rn})$ 是(左)綫性无关的,則存在有 $\alpha_{ij}(i=r+1, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, n)$ 使 $(\alpha)=(\alpha_{ij})$ 是一个单位.

2. 命 $\Delta$ 是含有 $q$ 个元素的一个有限可除环,証明:$\Delta_n$ 里单位的个数是
$$N=(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1}).$$

**7. 陣論上的应用** $\Delta_n$ 里基与单位間的对应使我們能够把已得的結果用到基上面,以得出关于元素在可除环里的陣的簡单而有意义的定理. 我們先証下面的定理.

**定理 6.** 如果 $(\alpha)$ 及 $(\beta)\in\Delta_n$,並且 $(\beta)(\alpha)=1$,則也有 $(\alpha)(\beta)=1$,而 $(\alpha)$ 与 $(\beta)$ 都 $\in L(\Delta, n)$.

証 如果 $(\beta)(\alpha)=1$,方程(8)指出:在 $f_i=\sum_j \alpha_{ij}e_j$ 时,$e_k$

---

1) 陣 $(\alpha_{ij})$ 的摺轉陣是这样的陣,它的 $(j, i)$-位置的元素是 $\alpha_{ij}$.

是对于 $f$ 綫性相关的．于是，上面的論証指出：$f$ 构成一个基．所以，$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣 $(\alpha)$ 是一个单位．因为逆陣是唯一的，所以 $(\beta) = (\alpha)^{-1}$．

**定理 7.** 如果 $(\alpha)$ 不是 $\Delta_n$ 里一个右（左）零因子，則 $(\alpha) \in L(\Delta, n)$．

証　我們要証的是：向量 $f_i = \sum_j \alpha_{ij} e_j$ 构成一个基；而由定理 4 知，証明 $f$ 都是綫性无关的就够了．所以，假定 $\sum \beta_i f_i = 0$，于是得 $\sum_{i,j} \beta_i \alpha_{ij} e_j = 0$，从而有 $\sum_i \beta_i \alpha_{ij} = 0\ (j = 1, 2, \cdots, n)$．所以，如果

$$(\beta) = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

則 $(\beta)(\alpha) = 0$．但 $(\alpha)$ 不是右零因子，故知 $(\beta) = 0$；从而每个 $\beta_i = 0$．这就証明 $f_i$ 是綫性无关的；并且关于 $(\alpha)$ 不是右零因子这一情形的証明就完成了．关于 $(\alpha)$ 不是左零因子这一情形的証明可由使用右向量空間依同样方法得出．証明的細节让讀者来做．

其次是，我們要获得羣 $L(\Delta, n)$ 的生成元素的集合．試考察下列各形状的陣：

$$T_{pq}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots\ \beta & \cdots & \\ & & & \ddots\ \vdots & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ p \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (\beta \text{ 在第 } q \text{ 列})$$

$$D_p(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \gamma & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \neq 0.$$

（$D_p(\gamma)$ 中 $\gamma$ 在第 $p$ 列.）

$$
P_{pq}=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & 1 & \cdots & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & \cdots & 0 & \cdots & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ p \\ \\ \\ \\ q \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

这里沒有写出的元素都是 0. 这些陣順序叫做 I, II 及 III 型初等陣. 它們都属于 $L(\Delta, n)$; 这因为, $T_{pq}(\beta)^{-1}=T_{pq}(-\beta)$, $D_p(\gamma)^{-1}=D_p(\gamma^{-1})$; $P_{pq}^{-1}=P_{pq}$. 現在来証下面的定理.

**定理 8.** $L(\Delta, n)$ 里任意陣 $(\alpha)$ 是初等陣的積.

証 首先我們看到,如果 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是有序基,則下列各集合也是有序基:

$(f_1, f_2, \cdots, f_{p-1}, f'_p, f_{p+1}, \cdots, f_n)$, $f'_p=f_p+\beta f_q$, $q\neq p$;

$(f_1, f_2, \cdots, f_{p-1}, f'_p, f_{p+1}, \cdots, f_n)$, $f'_p=\gamma f_p$, $\gamma\neq 0$;

$(f_1, \cdots, f_{p-1}, f'_p, f_{p+1}, \cdots, f_{q-1}, f'_q, f_{q+1}, \cdots, f_n)$, $f'_p=f_q$, $f'_q=f_p$.

再則,这些基关于 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 的陣是 I, II 或 III 型初等陣.

今令 $(\alpha)$ 是 $L(\Delta, n)$ 里任意陣,并且定义 $f_i=\sum_j \alpha_{ij}e_j$, 这里 $e_j$ 构成 $n$ 維向量空間的一个基,則 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是一个有序基. 我們要証明:能够从这个基經过一系列上面指出的各型"初等代換"而达到基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. 如果 $n=1$,就无須証明了;所以我們可假設这个定理在 $n-1$ 維向量空間是成立的. 因为所有 $f_i$ 不能都属于 $[e_2, e_3, \cdots, e_n]$,故有一个 $\alpha_{i1}\neq 0$, 譬如說是 $\alpha_{p1}$. 把 $f_1$ 与 $f_p$ 互換,得到基 $(f'_1, f_2, \cdots, f_{p-1}, f'_p, f_{p+1}, \cdots, f_n)$, 这里 $f'_1$ 用 $e_i$ 来表达时, $e_1$ 的系数是非零的. 接着用 $f^*_2=f_2+\beta f'_1$ 代換 $f_2$,这里选取 $\beta$ 使 $f^*_2\in[e_2, e_3, \cdots, e_n]$. 循此类推,經过一系列的初等代換得出基 $(f'_1, f^*_2, f^*_3, \cdots, f^*_n)$,这里 $f^*_i\in[e_2, e_3, \cdots, e_n]$. 因为向量 $f^*_2, f^*_3, \cdots, f^*_n$ 是綫性无关的,故构成 $[e_2, e_3, \cdots, e_n]$ 的

一个基. 于是,由归納法假設知,我們可通过有限次初等代换达到基$(f_1', e_2, e_3, \cdots, e_n)$. 然后,我們得出$(f_1'', e_2, e_3, \cdots, e_n)$,这里$f_1''=f_1'+\mu e_2$不含着$e_2$. 这样經过有限次代换后得出$(\gamma e_1, e_2, \cdots, e_n)$,由此就导出$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. 总結上面的証明可見:基$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$关于基$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$的陣$(\alpha)$是接連一系列的基所对应的陣的积;而这些陣都是初等陣,故定理成立.

### 習　題　6

1. 把下面的陣写成初等陣的积:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. 驗証:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

把这个結果推广,并应用推广的結果証明: I 及 II 型初等陣就足够生成$L(\Delta, n)$.

3. 証明:如果$\delta \neq 0$,則$\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{bmatrix}$是I型初等陣的积. 由此証明: $L(\Delta, n)$里任意陣可写成$(\beta)D_n(\gamma)$,这里$(\beta)$是I型初等陣的积,而$D_n(\gamma)$是上面定义过的陣.

**8. 向量集合的秩,行列式秩**　令$S=(x_\alpha)$是向量空間$\mathfrak{R}$的一个任意子集合,并令$[S]$表示由$S$生成的子空間. 如果$(x_1, x_2, \cdots, x_r)$是由集合$S$里选取的最大綫性无关向量的集合,于是$[S]$里向量是对于$x_i$綫性相关的. 所以$(x_1, x_2, \cdots, x_r)$是$[S]$的一个基. 維数不变性的定理指出: $r$是由$S$唯一决定的,亦即集合$S$的任意两个最大綫性无关子集合有相同的向量个数; 这数目叫做集合$S$的秩. 秩$r$必然$\leqslant n$; 而$r=n$的充要条件是$[S]=\mathfrak{R}$. 这些說明特别指出: 如果$S=\mathfrak{S}$是一个子空間,則$\mathfrak{S}=[S]$是有限維的,其維数$\leqslant n$;而且只有$\mathfrak{S}=\mathfrak{R}$时$\mathfrak{S}$的維数$=n$.

今应用向量集合的秩的概念来研究元素在可除环$\Delta$里的陣. 令$(\alpha)$是元素在$\Delta$里的任意$r \times n$陣,并且令$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$是$\mathfrak{R}$的一个任意有序基. 引入$\mathfrak{R}$的**行向量**$x_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j\ (i=1, 2, \cdots, r)$,并定义$(\alpha)$的**行秩**是集合$(x_1, x_2, \cdots, x_r)$的秩. 于

是，虽选取不同的基，結果总是相同．这因为，如果$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$是$\mathfrak{R}$（或其他$n$維空間）的另一个基，則映照$\sum \xi_i e_i \to \sum \xi_i f_i$是一种等价，它把$x_i$映照到$y_i = \sum\limits_j \alpha_{ij} f_j$．所以，$[x_1, x_2, \cdots, x_r]$的維数等于$[y_1, y_2, \cdots, y_r]$的維数．

仿此，我們可定义$(\alpha)$的列秩．此时，我們引入带有基$(e_1', e_2', \cdots, e_r')$的$r$維右向量空間$\mathfrak{R}'$．于是我們定义$(\alpha)$的列秩是集合$(x_1', x_2', \cdots, x_n')$的秩，这里$x_i' = \sum e_j' \alpha_{ji}$．$x_i'$叫做$(\alpha)$的列向量．我們在后一章里将要証明：一个陣的两种秩常是相等．特别在$\Delta$是（交换）域$\Phi$时，要証它們相等，可証明：这两种秩都与用行列式来定义的另一种秩相等．

我們从子式說起．設陣$(\alpha)$的元素$\alpha_{ij} \in \Phi$；則陣$(\alpha)$的子式是从$(\alpha)$去掉某些行及列所得的方陣的行列式．例如，二阶子式的形状是$\begin{bmatrix} \alpha_{pr} & \alpha_{ps} \\ \alpha_{qr} & \alpha_{qs} \end{bmatrix}$．如果$(\alpha)$里每个$(\rho+1)$-行子式的值都是0，而有一个$\rho$-行子式$\neq 0$，則説$(\alpha)$有行列式秩$\rho$．下面定理使我們能够証明行秩与行列式秩相等．証明用到了行列式的著名定理．

**定理 9.** 向量$x_i = \sum\limits_j \alpha_{ij} e_j \ (i = 1, 2, \cdots, r)$是綫性无關的，必須而且只須$(\alpha)$的行列式秩为$r$．

証　显然行列式秩$\rho \leqslant n$，而$x_i$是綫性无关的也只有$r \leqslant n$．故可假定$r \leqslant n$．先設$x_i$是綫性相关的，則有一个向量，譬如$x_1$，使$x_1 = \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_r x_r$．于是，$\alpha_{1j} = \beta_2 \alpha_{2j} + \beta_3 \alpha_{3j} + \cdots + \beta_r \alpha_{rj}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$．故

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} \sum\limits_2^r \beta_k \alpha_{k1} & \sum\limits_2^r \beta_k \alpha_{k2} & \cdots & \sum\limits_2^r \beta_k \alpha_{kn} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rn} \end{bmatrix}.$$

因为任意$r$-行子式的第一行是其他各行的綫性組合，所以每个$r$-行子式等于零．因此$\rho < r$．反过来，設$\rho < r$，則把$(\alpha)$的行或列作排列显然不变动行列式秩；但这样排列給出排成某种次序

的 $x$ 关于排成某种次序的 $e$ 的陣. 所以,我們不妨假定

$$\beta=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\rho}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\rho}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{\rho 1} & \alpha_{\rho 2} & \cdots & \alpha_{\rho\rho}\end{bmatrix}\neq 0.$$

令 $\beta_i(i=1,2,\cdots,\rho+1)$ 是

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,\rho+1}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2,\rho+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{\rho+1,1} & \alpha_{\rho+1,2} & \cdots & \alpha_{\rho+1,\rho+1}\end{bmatrix}$$

里 $\alpha_{i,\rho+1}$ 的余因子, 則 $\beta_{\rho+1}=\beta\neq 0$, 而 $\beta_1\alpha_{1j}+\beta_2\alpha_{2j}+\cdots+\beta_{\rho+1}\alpha_{\rho+1,j}=0\,(j=1,2,\cdots,n)$. 所以, $\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_{\rho+1}x_{\rho+1}=0$, 这里 $\beta_{\rho+1}\neq 0$,而 $x_i$ 是綫性相关的. 这就完成了定理的証明.

次令 $r$ 是随意的, 并且假定向量 $x_1,x_2,\cdots,x_\rho$ 是 $x_i$ 的集合的一个基. 由上面定理知,在 $(\alpha)$ 的前 $\rho$ 行里存在有一个非零的 $\rho$-行子式; 又因为任意 $\rho+1$ 个 $x_i$ 是綫性相关的, $(\alpha)$ 里每个 $\rho+1$-行子式等于零. 故行列式秩等于行秩 $\rho$. 如果把同样論証施于右向量空間,則可証列秩等于行列式秩. 故在域的情形,陣的两种秩(行秩及列秩)是相等的.

我們已知: 陣 $(\alpha)\in L(\Phi,n)$ 必須而且只須行向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 构成 $\mathfrak{R}$ 的一个基, 这里 $x_i=\sum_j\alpha_{ij}e_j$; 而后面的条件等价于説: $(\alpha)$ 的行秩是 $n$. 所以,上面結果指出: $(\alpha)\in L(\Phi,n)$ 必須而且只須这个陣的行列式在 $\Phi$ 里不等于零. 这个結果也可以直接証明(参看本书第一卷,第二章的 §4 中, 定理 1). 事实上, $(\alpha)$ 的逆陣可按下列法則借行列式簡单地列出: 令 $A_{ij}$ 是 $(\alpha)$ 里元素 $\alpha_{ji}$ 的余因子,并令 $\beta_{ij}=A_{ij}[\det(\alpha)]^{-1}$, 則 $(\beta_{ij})=(\alpha)^{-1}$. 这容易由行列式的展开定理导出, 証明見于本书第一卷, 第二章的 §4 中.

## 習 題 7

1. 証明：如果 $\Delta=\Phi$ 是可交换的，并且元素 $\alpha_i$ 全不相同，則

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix} \in L(\Phi, n).$$

（提示：这个陣的行列式叫做范德曼得（Vandermonde）行列式．証明它的值是 $\prod\limits_{i>j}(\alpha_i-\alpha_j)$.）

2. 証明：如果 $\Delta=\Phi$ 是一个域，并且 $(\alpha)\in L(\Phi,n)$，則摺轉陣 $(\alpha)'\in L(\Phi,n)$.

3. 証明第 2 題的下面逆定理：如果对于每个 $(\alpha)\in L(\Delta,2)$ 有 $(\alpha)'\in L(\Delta,2)$，則 $\Delta$ 是域．

4. 求下面陣的逆陣：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

**9. 商空間** $\mathfrak{R}$ 的任意子空間 $\mathfrak{S}$ 必然是加法羣 $\mathfrak{R}$ 的一个子羣．因为 $\mathfrak{R}$ 是可交換的，我們可定义商羣 $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$. 这个羣的元素是陪集 $\bar{x}=x+\mathfrak{S}$，而 $\bar{\mathfrak{R}}$ 里合成法是

$$\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}.$$

今令 $\alpha$ 是 $\Delta$ 的任意元素，如果 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ \mathfrak{S})$，亦即 $x-y=z\in\mathfrak{S}$，則 $\alpha z\in\mathfrak{S}$，故 $\alpha x\equiv\alpha y(\mathrm{mod}\ \mathfrak{S})$. 因此，陪集 $\alpha\bar{x}$ 由陪集 $\bar{x}$ 及元素 $\alpha\in\Delta$ 唯一决定．我們定义这个陪集是积 $\alpha\bar{x}$，并且不难驗証：$\bar{\mathfrak{R}}$，$\Delta$ 及合成 $(\alpha,\bar{x})\to\alpha\bar{x}$ 构成一个向量空間；而把这个空間叫做 $\mathfrak{R}$ 关于子空間 $\mathfrak{S}$ 的**商空間**．

今令 $(f_1,f_2,\cdots,f_r)$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个基，把它扩张为 $\mathfrak{R}$ 的一个基 $(f_1,f_2,\cdots,f_r,f_{r+1},\cdots,f_n)$，我們要証：陪集 $\bar{f}_{r+1},\cdots,\bar{f}_n$ 是 $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ 的一个基．令 $\bar{x}$ 是任意陪集，写下 $x=\sum\limits_1^n\alpha_i f_i$，則

$\bar{x}=\overline{\sum\limits_1^n\alpha_i f_i}=\sum\limits_1^n\overline{\alpha_i f_i}=\sum\limits_1^n\alpha_i\bar{f}_i=\sum\limits_{r+1}^n\alpha_i\bar{f}_i$，这因为 $i\leqslant r$ 时 $\bar{f}_i=0$. 因此，$(\bar{f}_{r+1},\cdots,\bar{f}_n)$ 是 $\bar{\mathfrak{R}}$ 的生成元素集合．另一方面，如果 $\sum\limits_{r+1}^n\beta_i\bar{f}_i=0$，則 $\sum\limits_{r+1}^n\beta_i f_i\in\mathfrak{S}$，故 $\sum\limits_{r+1}^n\beta_i f_i=\sum\limits_1^r\gamma_k f_k$. 由此知所

有 $\beta_i=0$. 这就可見 $(\bar{f}_{r+1},\cdots,\bar{f}_n)$ 是一个基. 这就証明了: $\bar{\mathfrak{R}}$ 的維数是 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{S}$ 的維数的差.

**10. 子空間的代数** 可除环 $\Delta$ 上向量空間 $\mathfrak{R}$ 的子空間全体 $L$ 对于将要定义的两种合成构成一个有趣类型的代数系. 先就 $L$ 关于集合的包含关系来說,对于这个关系,$L$ 是一个偏序集合[1],就是說: 对于 $L$ 里各对 $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ 定义了关系 $\mathfrak{S}_1\supseteq\mathfrak{S}_2$,而且

1. $\mathfrak{S}\supseteq\mathfrak{S}$,

2. 如果 $\mathfrak{S}_1\supseteq\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_2\supseteq\mathfrak{S}_1$,則 $\mathfrak{S}_1=\mathfrak{S}_2$,

3. 如果 $\mathfrak{S}_1\supseteq\mathfrak{S}_2$,而 $\mathfrak{S}_2\supseteq\mathfrak{S}_3$,則 $\mathfrak{S}_1\supseteq\mathfrak{S}_3$

所以这关系是反身,斜对称与传递的.

次就任意两个子空間 $\mathfrak{S}_1$ 及 $\mathfrak{S}_2$ 来說,邏輯的交 $\mathfrak{S}_1\cap\mathfrak{S}_2$ 也是一个子空間,而这个空間关于包含关系起了最大下界的作用,这就是說: $\mathfrak{S}_1\cap\mathfrak{S}_2$ 含于 $\mathfrak{S}_1$ 与 $\mathfrak{S}_2$ 里,并且 $\mathfrak{S}_1\cap\mathfrak{S}_2$ 含有每个 $\mathfrak{S}'$,它是含于 $\mathfrak{S}_1$ 与 $\mathfrak{S}_2$ 里的. 两个空間的集合論上的和 $\mathfrak{S}_1\cup\mathfrak{S}_2$ 不一定是一个子空間,所以我們取由集合 $\mathfrak{S}_1\cup\mathfrak{S}_2$ 生成的空間 $[\mathfrak{S}_1\cup\mathfrak{S}_2]$ 来代替这个集合,并且用 $\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2$ 表示这个空間,而叫它做 $\mathfrak{S}_1$ 与 $\mathfrak{S}_2$ 的联合. 它具有最小上界的性質: $\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2\supseteq\mathfrak{S}_1$ 及 $\mathfrak{S}_2$,并且它是含于每个子空間 $\mathfrak{S}$ 里,而 $\mathfrak{S}$ 含有 $\mathfrak{S}_1$ 及 $\mathfrak{S}_2$ 的. 我們易知,这些性質是 $\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2$ 的特性,就是說; 具有这些性質的任意子空間与 $\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2$ 是迭合的. 由这个特性或由 $\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2$ 即为 $[\mathfrak{S}_1\cup\mathfrak{S}_2]$ 的定义立知,这个空間是如 $y_1+y_2$ 形的向量的集合,这里 $y_i\in\mathfrak{S}_i$.

如果一个偏序集合里任意两个元素都有一个最大下界与一个最小上界时,这个偏序集合叫作格. 所以 $L$ 叫作空間 $\mathfrak{R}$ 的子空間的格. 我們在本节里将导出这个格的基本性質. 首先是下列各性質在任意格中都成立.

**1.** 結合律及交換律对于合成 $\cap$ 及 $+$ 成立.

这易由定义得出. 关于 $\cap$ 的法則讀者自然是熟悉的.

其次,是格 $L$ 的一些特有性質.

---

1) 关于本节所述的各概念,参看本书第一卷第七章.

**2.** $L$ 里存在有一个零元素,亦即元素 0,使对于所有 $\mathfrak{S}$,

$$\mathfrak{S} \cap 0 = 0, \quad 及 \quad \mathfrak{S} + 0 = \mathfrak{S}.$$

只由 0 向量构成的子空間具有这些性質. 与此相对的整个空間 $\mathfrak{R}$ 有"全"元素的作用,亦即对于所有 $\mathfrak{S}$ 使

$$\mathfrak{S} + \mathfrak{R} = \mathfrak{R} \quad 及 \quad \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{S}.$$

分配律 $\mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3) = \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3$ 在 $L$ 里一般不能成立. 例如,令 $x_1$ 及 $x_2$ 是无关向量,并且令 $\mathfrak{S}_1 = [x_1]$, $\mathfrak{S}_2 = [x_2]$ 及 $\mathfrak{S}_3 = [x_1 + x_2]$,則 $\mathfrak{S}_2+\mathfrak{S}_3 = [x_1, x_2]$,故 $\mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2+\mathfrak{S}_3) = \mathfrak{S}_1$. 但 $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = 0$, $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3 = 0$,故 $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3 = 0$. 这就可見分配律不成立. 我們将指出較弱的分配律在 $L$ 里成立,这就是下面的法則:

**3.** 如果 $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_2$,則 $\mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3) = \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3$.

証 我們首先知道,$\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 \subseteq \mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3)$ 及 $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3 \subseteq \mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3)$. 所以

$$\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3 \subseteq \mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3).$$

次令 $z \in \mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2+\mathfrak{S}_3)$,則 $z = y_1 \in \mathfrak{S}_1$ 与 $z = y_2+y_3$,这里 $y_2 \in \mathfrak{S}_2$, $y_3 \in \mathfrak{S}_3$. 于是,$y_3 = y_1 - y_2 \in \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1$. 故 $y_3 \in \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3$,而 $z = y_2+y_3 \in \mathfrak{S}_2+\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3$. 这証明了 $\mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2+\mathfrak{S}_3) \subseteq \mathfrak{S}_2+\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3$. 所以 3 成立.

3 能够成立的格叫做**模格**(或**狄得京得**(Dedekind)**格**). 我們要指出 $L$ 是一个**有余格**,亦即下面性質成立.

**4.** 对于 $L$ 里任意的 $\mathfrak{S}$,在 $L$ 里存在有一个 $\mathfrak{S}^*$ 使

$$\mathfrak{S} + \mathfrak{S}^* = \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}^* = 0.$$

証 如果 $(f_1, f_2, \cdots, f_r)$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个基,則这些向量是綫性无关的,因此可用向量 $f_{r+1}, \cdots, f_n$ 补充以得 $\mathfrak{R}$ 的一个基 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$. 命 $\mathfrak{S}^* = [f_{r+1}, f_{r+2}, \cdots, f_n]$,則 $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}^* = [f_1, f_2, \cdots, f_n] = \mathfrak{R}$. 不仅如此,$\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}^*$ 里任意向量 $y$ 是对于 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ 綫性相关的,也对于 $f_{r+1}, f_{r+2}, \cdots, f_n$ 綫性相关的. 因为 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是綫性无关的,所以 $y = 0$;故 $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}^* = 0$.

适合上面条件的子空間 $\mathfrak{S}^*$ 叫做 $\mathfrak{R}$ 里子空間 $\mathfrak{S}$ 的余空間. 末了,我們要提到下面的鏈条件在 $L$ 里成立:

5. 如果 $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_2 \supseteq \cdots$ 是子空間的一个无限降鏈, 则有一个整数 $r$ 存在使 $\mathfrak{S}_r = \mathfrak{S}_{r+1} = \cdots$.

如果 $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2 \subseteq \cdots$ 是子空間的一个无限升鏈, 则有一个整数 $r$ 存在使 $\mathfrak{S}_r = \mathfrak{S}_{r+1} = \cdots$.

因为子空間的維数是一个非負整数[1], 并且因为 $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{S}'$ 可推得 $\dim \mathfrak{S} > \dim \mathfrak{S}'$,所以这两个条件是显然成立的,这里 $\dim \mathfrak{S}$ 表 $\mathfrak{S}$ 的維数.

### 習 題 8

1. 証明:如果 $\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$,则 $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_2$,或是 $\mathfrak{S}_2 \supseteq \mathfrak{S}_1$.
2. 証明:如果 $\dim \mathfrak{S} = r$,则任意余空間的維数是 $n - r$.
3. 証明:一般維数关系:
$$\dim (\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2) = \dim \mathfrak{S}_1 + \dim \mathfrak{S}_2 - \dim (\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2).$$
4. 証明:如果 $\mathfrak{S}$ 是任意子空間, $\neq 0$,也 $\neq \mathfrak{R}$,则 $\mathfrak{S}$ 的余空間不只一个.

**11. 无关子空間,直接和** 下面要談到一个概念, 它是向量的綫性无关概念的一个推广. 令 $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \cdots, \mathfrak{S}_r$ 是 $\mathfrak{R}$ 的子空間的有限集合. 如果

(9) $\mathfrak{S}_i \cap (\mathfrak{S}_1 + \cdots + \mathfrak{S}_{i-1} + \mathfrak{S}_{i+1} + \cdots + \mathfrak{S}_r) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$

则說这些子空間是无关的. 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 是 $\mathfrak{R}$ 里向量, 则它們成为綫性无关的充要条件是: 1) $x_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$; 2) 空間 $[x_i]$ 是无关的. 这因为, 設 1) 与 2) 成立, 并且令 $\sum \beta_i x_i = 0$,则

$$-\beta_i x_i = \sum_{j \neq i} \beta_j x_j \in [x_i] \cap ([x_1] + \cdots + [x_{i-1}] + [x_{i+1}] + \cdots + [x_r]).$$

由 2) 知 $-\beta_i x_i = 0$. 因为 $x_i \neq 0$, 就推得各个 $\beta_i = 0$. 次設 $x_i$ 是綫性无关的,则必然地各个 $x_i \neq 0$. 如果

$$x \in [x_i] \cap ([x_1] + \cdots + [x_{i-1}] + [x_{i+1}] + \cdots + [x_r]),$$

---

1) 零空間的維数取为 0.

则 $x = \beta_i x_i = \sum_{j \neq i} \beta_j x_j$. 故由 $x_i$ 的綫性无关得 $\beta_i = 0$；因此 $x = 0$.

令 $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \cdots, \mathfrak{S}_r$ 是任意无关子空間，并且令 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \cdots + \mathfrak{S}_r$. 如果 $y \in \mathfrak{S}$, 則 $y = y_1 + y_2 + \cdots + y_r$, 这里 $y_i \in \mathfrak{S}_i$. 这个表达式可断定是唯一的；就是說，如果还有 $y = y_1' + y_2' + \cdots + y_r'$, 这里 $y_i' \in \mathfrak{S}_i$, 則必有 $y_i = y_i'(i = 1, 2, \cdots, r)$. 这因为，如果 $\sum y_i = \sum y_i'$, 令 $z_i = y_i - y_i' \in \mathfrak{S}_i$, 則 $\sum z_i = 0$. 于是，

$$-z_i = \sum_{j \neq i} z_j \in \mathfrak{S}_i \cap (\mathfrak{S}_1 + \cdots + \mathfrak{S}_{i-1} + \mathfrak{S}_{i+1} + \cdots + \mathfrak{S}_r).$$

故 $z_i = 0$, 而 $y_i = y_i'$. 这个結果的逆定理也是成立的；这因为，如果(9)对于有些 $i$ 不成立，則在这个交里有向量 $z_i \neq 0$ 存在. 于是，$z_i = \sum_{j \neq i} z_j$, 而这个元素在写成空間 $\mathfrak{S}_k$ 的元素的和时有两种不同的表达式了，这是不合理的. 因此就証明了以下定理.

**定理 10.** 空間 $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \cdots, \mathfrak{S}_r$ 是无關的的充要條件为 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \cdots + \mathfrak{S}_r$ 里每个向量有一个唯一的表達式如 $\sum y_i$ 形，这里 $y_i \in \mathfrak{S}_i$.

子空間的无关性的另一个重要特征是

**定理 11.** 空間 $\mathfrak{S}_i$ 是无關的必須而且只須 $\dim(\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \cdots + \mathfrak{S}_r) = \sum \dim \mathfrak{S}_i$.

証 先設 $\mathfrak{S}_i$ 是无关的，并令 $(f_{1i}, f_{2i}, \cdots, f_{n_i i})$ 是 $\mathfrak{S}_i$ 的一个基. 如果 $\sum_{i,j} \beta_{ji} f_{ji} = 0$, 則 $\sum_i y_i = 0$, 这里 $y_i = \sum_j \beta_{ji} f_{ji} \in \mathfrak{S}_i$. 所以，对于每个 $i$ 有 $0 = y_i = \sum_j \beta_{ji} f_{ji}$. 因为 $i$ 固定时 $f_{ji}$ 是綫性无关的，故 $\beta_{ji} = 0$. 这証明了所有 $f_{ji}$ 都是綫性无关的. 于是，$f_{ji}$ 构成 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \cdots + \mathfrak{S}_r$ 的一个基. 它們的个数是 $\sum n_i$, 这里 $n_i = \dim \mathfrak{S}_i$ 是 $\mathfrak{S}$ 的維数. 故 $\dim \mathfrak{S} = \sum \dim \mathfrak{S}_i$. 反过来，設这个維数关系成立，如前一样令 $f_{ji}$ 构成 $\mathfrak{S}_i$ 的一个基，則这些 $f_{ji}$ 的个数是 $\sum \dim \mathfrak{S}_i = \dim \mathfrak{S}$. 另一方面，这些 $f_{ji}$ 是 $\mathfrak{S}$ 的生成元素，故它們构成一个基，因而是綫性无关的. 由此立知，如果 $\sum y_i = \sum y_i'$, 而 $y_i, y_i' \in \mathfrak{S}_i$, 則 $y_i = y_i'$. 故 $\mathfrak{S}_i$ 是无关的.

如果 $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{R}_r$ 是无关的子空間，而 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2+\cdots+\mathfrak{R}_r$，則說 $\mathfrak{R}$ 是子空間 $\mathfrak{R}_i$ 的**直接和**，記做 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\oplus\mathfrak{R}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}_r$. 在这样情形下，$\mathfrak{R}$ 的每个向量有一种方法而且只有一种方法把它写成子空間 $\mathfrak{R}_i$ 里向量的和.

## 習 題 9

1. 証明：下面的条件是子空間 $\mathfrak{S}_i$ 成无关的的充要条件：

$\mathfrak{S}_1\cap\mathfrak{S}_2=0$, $(\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2)\cap\mathfrak{S}_3=0$, $(\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2+\mathfrak{S}_3)\cap\mathfrak{S}_4=0$, $\cdots$.

2. 証明：如果 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\oplus\mathfrak{R}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}_r$，并且各个 $\mathfrak{R}_i=\mathfrak{R}_{i1}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}_{in_i}$，則

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{11}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}_{1n_1}\oplus\mathfrak{R}_{21}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}_{2n_2}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}_{rn_r}.$$

# 第 二 章

## 綫性变换

本章我們討論綫性变换及由这些映照决定的某些代数系．两个特殊型的綫性变换，即向量空間到它自身內的綫性变换及一个空間到一維空間 $\Delta$ 內的綫性变换，特饒兴趣．前者构成一个环；而后者叫做綫性函数，构成一个右向量空間．向量空間 $\mathfrak{R}_1$ 到向量空間 $\mathfrak{R}_2$ 的綫性变换很自然地連带着 $\mathfrak{R}_2$ 上綫性函数的共軛空間到 $\mathfrak{R}_1$ 的共軛空間內的折轉綫性变换．我們論述对換映照的性質，討論綫性变换与陣間的关系，还定义了任意綫性变换的秩与朒．末了，討論叫做射影的特殊型綫性变换，并且在这类型的变换与向量空間的直接分解間建立一个联系．

**1. 定义及例子**　实系数多項式的向量空間 $\Phi[\lambda]$ 里微分映照 $\phi(\lambda)\to\phi'(\lambda)$ 具有性質

$$[\phi(\lambda)+\psi(\lambda)]'=\phi'(\lambda)+\psi'(\lambda),\quad [\alpha\phi(\lambda)]'=\alpha\phi'(\lambda).$$

这是綫性变换的一个例子．另一个例子是由

$$(\xi,\eta,\zeta)\to\xi\lambda+\eta\mu+\zeta\nu$$

定义的 $\Delta^{(3)}$ 的映照，这里 $\lambda,\mu,\nu$ 是基本可除环 $\Delta$ 里的固定元素．一般的說，令 $\mathfrak{R}_1$ 及 $\mathfrak{R}_2$ 是同一可除环 $\Delta$ 上的向量空間，如果 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 內的一个映照 $A$ 对于 $\mathfrak{R}_1$ 里所有 $x, y$ 及 $\Delta$ 里所有 $\alpha$ 适合

$$(x+y)A=xA+yA;\quad (\alpha x)A=\alpha(xA),\tag{1}$$

则叫 $A$ 做**綫性变换**．按通例，$xA$ 表示元素 $x$ 在 $\mathfrak{R}_2$ 里的象．我們还把象的集合，亦即象 $xA$ 的集合，記作 $\mathfrak{R}_1A$．$A$ 是到 $\mathfrak{R}_2$ 內的映照这一說法是容許 $\mathfrak{R}_1A\subset\mathfrak{R}_2$（即 $\mathfrak{R}_1A$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 的眞子集合）的可能性．

綫性变换的概念是 o-模 $\mathfrak{R}_1$ 到另一个模內的 o-同态的概念的

特殊情形；我們用“$\alpha\in\mathfrak{o}$”代替上面定义里的“$\alpha\in\Delta$”即得到推广. 1—1 对应的 $\mathfrak{o}$-同态已在第一章介紹过，这样的映照叫做等价或 $\mathfrak{o}$-同构. $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 上的 $\mathfrak{o}$-同构的存在是模 $\mathfrak{R}_i$ 的等价的判别准則.

(1) 里第一个条件表明 $A$ 是加法羣 $\mathfrak{R}_1$ 到加法羣 $\mathfrak{R}_2$ 內的一个同态，而第二个条件可解释为 $A$ 与 $\alpha$ 的可交换性的一种类型. 在 $\mathfrak{R}_1=\mathfrak{R}_2=\mathfrak{R}$ 时这样解释很恰当的，这因为，对于每个 $\alpha$ 我們可引进映照 $\alpha_l$，它把 $x$ 映照为 $\alpha x$. 我們把 $\alpha_l$ 叫做由 $\alpha$ 决定的純量乘法. 显然 $\alpha_l$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个自同态，亦即 $\mathfrak{R}$ 到它自身內的一个同态，这时 $\mathfrak{R}$ 作为一个羣来看待. 由于 $x(\alpha_l A)=(\alpha x)A$ 及 $x(A\alpha_l)=\alpha(xA)$，所以 $A$ 是向量空間 $\mathfrak{R}$ 里一个綫性变換必須而且只須 $A$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个自同态，而与所有自同态 $\alpha_l$ 可交換的.

在向量空間到它自身的綫性变換外，另一种可注意的綫性变換的类型是綫性函数，这是向量空間 $\mathfrak{R}$ 到可除环 $\Delta$ 的一个映照 $x\rightarrow f(x)$，它使

$$f(x+y)=f(x)+f(y), f(\alpha x)=\alpha f(x). \tag{2}$$

这种类型的映照显然可看作 $\mathfrak{R}$ 到一維向量空間 $\Delta$ 內的綫性变換. 这样一維向量空間 $\Delta$ 是用 $\Delta$ 的加法羣作为羣，用 $\Delta$ 作为可除环，左乘法 $\alpha\xi$ 作为純量乘法而得. 元素 1 (或任意非零元素)是可除环 $\Delta$ 上向量空間 $\Delta$ 的一个基. 上面举的第二例就是 $\Delta^{(3)}$ 上綫性函数的例.

### 習 題 10

1. 証明：微分映照 $\phi(\lambda)\rightarrow\phi'(\lambda)$ 是次数 $<n$ 的多項式构成的向量空間 $\mathfrak{R}$ 里一个綫性变換.

2. 証明：差算子 $\phi(\lambda)\rightarrow\phi(\lambda+1)-\phi(\lambda)$ 是 $\Phi[\lambda]$ 里的一个綫性变換.

**2. 綫性变換的合成** 今述綫性变換的合成方法. 必須指出，本节所有結果同样可使用于更一般的模的 $\mathfrak{o}$-同态情形，但为省事起見，仅就此后最感兴趣的特殊情形叙述它的結果.

先設 $A$ 与 $B$ 是向量空間 $\mathfrak{R}_1$ 到同一空間 $\mathfrak{R}_2$ 內的綫性变換. 我們用方程

(3) $$x(A+B)=xA+xB.$$
定义 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内的映照 $A+B$,这里 $x$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 里任意向量. 于是,把象 $xA$ 与 $xB$ 相加就得到施 $A+B$ 于 $x$ 的象. 显然 $A+B$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内的一个(单值)变换. 因为

$$\begin{aligned}(x+y)(A+B) &= (x+y)A+(x+y)B = xA+yA+xB+yB \\ &= xA+xB+yA+yB = x(A+B)+y(A+B),\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}(\alpha x)(A+B) &= (\alpha x)A+(\alpha x)B = \alpha(xA)+\alpha(xB) \\ &= \alpha(xA+xB) = \alpha(x(A+B)),\end{aligned}$$

所以 $A+B$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内的一个綫性变换.

$\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内的綫性变换的全体記作 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$,我們要証:这个集合带着上面引进的加法合成是一个交换羣. 首先我們知道:結合律与交换律是成立的,这因为,

$$x[(A+B)+C] = x(A+B)+xC = xA+xB+xC,$$
$$x[A+(B+C)] = xA+x(B+C) = xA+xB+xC;$$
$$x(A+B) = xA+xB, \quad x(B+A) = xB+xA.$$

所以 $(A+B)+C$ 与 $A+(B+C)$ 对于 $\mathfrak{R}_1$ 里任意的 $x$ 都有同一的象, 按定义知: $A+(B+C)=(A+B)+C$. 同理得 $A+B=B+A$. 其次,我們用条件 $x0=0$ ($\mathfrak{R}_2$ 里的零向量)来定义映照 0. 我們易知,这个映照属于 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$,并且对于 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 里所有 $A$ 有 $A+0=A=0+A$. 所以, 0 对于加法合成有恆等元素的作用. 末了,如果 $A$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 里任意元素,我們定义 $-A$ 是使 $x(-A)=-xA$ 的映照. 我們易証: $-A\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$. 因为对于所有 $x$ 有 $x(A+(-A))=xA-xA=0$,所以 $-A$ 有 $A$ 的逆元素的作用. 这样就完成了 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$, + 是一个交换羣的証明.

其次,我們引入綫性变换的第二种合成. 这是对于 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 里的任意 $A$ 与 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3)$ 里的任意 $B$ 作定义, 而取为施行 $A$ 后又施行 $B$ 的結果; 依通例我們把这結果記作 $AB$. 于是, 定义 $x(AB)=(xA)B$. 因为,

$$(x+y)(AB)=((x+y)A)B=(xA+yA)B$$
$$=(xA)B+(yA)B=x(AB)+y(AB),$$
及
$$(\alpha x)(AB)=((\alpha x)A)B=(\alpha(xA))B$$
$$=\alpha((xA)B)=\alpha(x(AB)),$$
故知: $AB\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1,\mathfrak{R}_3)$.

如果 $A\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1,\mathfrak{R}_2)$, $B\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2,\mathfrak{R}_3)$, $C\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_3,\mathfrak{R}_4)$, 則对于 $\mathfrak{R}_1$ 里任意 $x$ 有
$$x((AB)C)=(x(AB))C=((xA)B)C$$
及
$$x(A(BC))=(xA)(BC)=((xA)B)C,$$
故积 $AB$ 适合結合律,亦即

$$(AB)C=A(BC). \tag{4}$$

其次証重要的分配律: 如果 $A\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1,\mathfrak{R}_2)$ 而 $B$, $C\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2,\mathfrak{R}_3)$, $D\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_3,\mathfrak{R}_4)$, 則

$$A(B+C)=AB+AC,\quad (B+C)D=BD+CD. \tag{5}$$

这可由下面的方程得出:
$$x(A(B+C))=(xA)(B+C)=(xA)B+(xA)C$$
$$=x(AB)+x(AC)=x(AB+AC),$$
$$x((B+C)D)=(xB+xC)D=(xB)D+(xC)D$$
$$=x(BD)+x(CD)=x(BD+CD).$$

今把上面結果用于只有一个向量空間 $\mathfrak{R}$ 的綫性变換的特殊情形. 显然 $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$, $+$, $\cdot$ 是一个环;这因为 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$, $+$ 是一个交换羣, 而 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$ 对于 $\cdot$ 是封閉的, 并且这个合成是可結合的,而关于加法是可分配的. 显然 $\mathfrak{L}$ 还含有恆等映照 $x\rightarrow x$, 而这个映照記作 1, 是环 $\mathfrak{L}$ 里的恆等元素 (即对于所有 $A$ 使 $A1=A=1A$)[1].

---

1) 讀者如果熟悉象本书第一卷第二章的 § 13 里所述交換羣的自同态理論,就会知道这些結果可由下列推理得出: $\mathfrak{R}$, $+$ 的自同态的集合 $\mathfrak{E}$ 是一个环, 它的加法合成是 $x(A+B)=xA+xB$, 而以乘积为乘法合成. 集合 $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$ 是 $\mathfrak{E}$ 里能与純量乘法 $\alpha_l$ 交换的元素的子集合. 因为环里与一个給定子集合的元素可交換的元素的全体构成一个子环,显然 $\mathfrak{L}$ 是 $\mathfrak{E}$ 的一个子环.

次設 $\Phi$ 是环 $\Delta$ 的心，則 $\Phi$ 是 $\Delta$ 的一个子域. 因为由元素 $\gamma \in \Phi$ 决定的純量乘法 $\gamma_l$ 是一个自同态，并且

$$(\alpha x)\gamma_l = \gamma(\alpha x) = (\gamma\alpha)x = (\alpha\gamma)x = \alpha(\gamma x) = \alpha(x\gamma_l),$$

所以 $\gamma_l$ 是綫性变换. 如果用 $\Phi_l$ 表示由 $\Phi$ 的元素 $\gamma$ 决定的純量乘法的集合，則 $\mathfrak{L} \supseteq \Phi_l$. 在特殊情形，如果 $\Delta = \Phi$ 是可交換的，則 $\mathfrak{L}$ 含所有的純量乘法. 今来証明：任意一个 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 可看做域 $\Phi$ 上的一个向量空間. 本着这个目的，对于 $\gamma \in \Phi$ 及 $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$，我們定义 $\gamma A$ 是映照 $x \to \gamma(xA) = (\gamma x)A$. 因为这是 $A$ 与 $\gamma_l(\in \mathfrak{R}_2)$ 的积，或 $\gamma_l(\in \mathfrak{R}_1)$ 与 $A$ 的积，而且每个都是綫性变換，故 $\gamma A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$. 我們容易驗証：函数 $\gamma A$ 适合向量空間里关于純量乘法的各法則；因此 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 可看做是 $\Phi$ 上向量空間.

总結上面两段的結果可知：集合 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ 是一个环，同时也是域 $\Phi$ 上一个向量空間. 环加法此时与向量空間里加法相同，而乘法与純量乘法間有下面的关系：

$$\gamma(AB) = (\gamma A)B = A(\gamma B). \tag{6}$$

具有这些性質的代数系叫做域 $\Phi$ 上代数(或超复数系). 所以，如果对于 $\mathfrak{L}$ 想同时就三种运算作討論，則把这个代数系叫做 $\mathfrak{R}$ 里綫性变换代数.

## 習 題 11

1. 証明：$\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 是关于合成 $AX$ 的一个 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_1)$-模，这里 $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_1)$，$X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 而合成 $AX$ 为积綫性变换. 仿此，証明：$\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 可看作一个右 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_2)$-模.
2. 証明：如果 $\alpha_l$ 是一个綫性变換，則 $\alpha$ 在 $\Delta$ 的心 $\Phi$ 里.
3. 驗証：如果 $C \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_2)$ 而 $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$，則映照 $X \to XC$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 的一个 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_1)$-自同态.

**3. 綫性变换的陣** 今要証：一个有限維向量空間 $\mathfrak{R}_1$ 到另一个有限維向量空間 $\mathfrak{R}_2$ 内的綫性变換可借元素在可除环 $\Delta$ 里的一个有限陣完全表明出来.

令 $\mathfrak{R}_i (i = 1, 2)$ 是 $n_i$ 維向量空間，令 $(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 的一个有序基，$(f_1, f_2, \cdots, f_{n_2})$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 的一个有序基，并令 $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$. 首先要講的是：$A$ 对于任意 $x$ 的作用可由象

$e_iA(i=1, 2, \cdots, n_1)$ 决定出；这因为 $x$ 可写成 $\sum_1^{n_1} \xi_i e_i$，所以 $xA = (\sum \xi_i e_i) A = \sum (\xi_i e_i) A = \sum \xi_i (e_i A)$，而 $xA$ 就由 $x$ 的表达式及象 $e_iA$ 决定. 令

(7) $e_iA = \alpha_{i1} f_1 + \alpha_{i2} f_2 + \cdots + \alpha_{in_2} f_{n_2} \quad (i = 1, 2, \cdots, n_1)$，

则得陣

$$(8) \qquad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n_2} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n_1 1} & \alpha_{n_1 2} & \cdots & \alpha_{n_1 n_2} \end{bmatrix}$$

为 $(e_1A, \cdots, e_{n_1}A)$ 关于 $(f_1, \cdots, f_{n_2})$ 的陣. 如果已知两个有序基及陣(8)，則 $A$ 对于 $x$ 的效果显然可以推得，这因为(7)成立，而 $xA = \sum_{i,j} \xi_i \alpha_{ij} f_j$.

这个联系可由陣的乘法表出如次. 記 $x = \sum \xi_i e_i$ 为一个行 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n_1})$，同样，記 $y = \sum \eta_j f_j$ 为 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n_2})$，则与 $y = xA$ 連带的"行向量"可由施行陣的乘法

$$(9) \qquad (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n_1}) \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n_2} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n_1 1} & \alpha_{n_1 2} & \cdots & \alpha_{n_1 n_2} \end{bmatrix}$$

而得出. 故 $xA = y = \sum \eta_j f_j$，这里 $\eta_j = \sum_i \xi_i \alpha_{ij}$，这就是由(9)得出的結果.

必須指出，陣 $(\alpha)$ 与两个空間内基的选择有关；因此，$(\alpha)$ 叫做 $A$ 关于有序基 $(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$ 及 $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_2})$ 的陣. 如果 $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$，則自然只用一个有序基，亦即取 $f_i = e_i$；此时，称 $(\alpha)$ 是 $A$ 关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣.

上面所得的結果是：任意 $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 决定元素属于 $\Delta$ 的一个 $n_1 \times n_2$ 陣. 今来叙述逆定理：任意 $n_1 \times n_2$ 陣定义 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内的一个綫性变换. 首先我們要指出：如果 $(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 里一个基，而 $(u_1, u_2, \cdots, u_{n_1})$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 里 $n_1$ 个向量的任意有序集

合，則有一个綫性变换 $A$ 存在把 $e_i$ 映照到 $u_i(i=1,2,\cdots,n_1)$. 这可观察映照 $\sum\xi_ie_i\to\sum\xi_iu_i$ 而得到. 因为一个向量 $x\in\mathfrak{R}_1$ 只有一种方法写成 $\sum\xi_ie_i$，所以这个映照是单值的，又因为任意 $x\in\mathfrak{R}_1$ 都可写成 $\sum\xi_ie_i$ 的形状，所以这个映照定义在整个 $\mathfrak{R}_1$ 上. 如果 $y=\sum\eta_ie_i$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 里另一个向量，所以 $y\to\sum\eta_iu_i$，并且 $x+y=\sum(\xi_i+\eta_i)e_i\to\sum(\xi_i+\eta_i)u_i=\sum\xi_iu_i+\sum\eta_iu_i$；故这样变换是一个同态. 又因为 $\alpha x=\sum(\alpha\xi_i)e_i\to\sum(\alpha\xi_i)u_i=\alpha(\sum\xi_iu_i)$，故映照是綫性的. 显然，$e_i=1e_i\to 1u_i=u_i$，即得所求. 次令 $(\alpha)$ 是任意 $n_1\times n_2$ 陣，并且令 $(f_1,f_2,\cdots,f_{n_2})$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 里一个基，則定义 $u_i=\sum\alpha_{ij}f_j(i=1,2,\cdots,n_1)$，并且可决定一个綫性变换 $A$ 使 $e_iA=u_i$. 显然 $A$ 关于 $(e_1,e_2,\cdots,e_{n_1})$，$(f_1,f_2,\cdots,f_{n_2})$ 的陣是給定的陣 $(\alpha)$. 这就証明了对应 $A\to(\alpha)$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1,\mathfrak{R}_2)$ 与元素在 $\Delta$ 里的 $n_1\times n_2$ 陣的集合間的 1—1 对应.

### 習　題　12

1. 令 $\mathfrak{R}$ 是次数 $<n$ 的实系数多項式构成的向量空間，令 $D$ 表示微分算子，証明：$D$ 是无势的，亦即 $D^n=0$. 决定 $D$ 关于 $(1,\lambda,\cdots,\lambda^{n-1})$ 及关于 $(1,\lambda/1!,\cdots,\lambda^{n-1}/(n-1)!)$ 的陣.

2. 令 $\mathfrak{R}$ 是次数 $<n$ 的实系数多項式构成的向量空間，并令 $U$ 是綫性算子 $f(\lambda)\to f(\lambda+1)$. 証明：

$$U=1+\frac{D}{1!}+\frac{D^2}{2!}+\cdots+\frac{D^{n-1}}{(n-1)!}.$$

3. 决定 $\delta=U-1$ 关于基 $(e_0,e_1,\cdots,e_{n-1})$ 的陣，这里

$$e_0=1,\quad e_i=\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)}{i!}.$$

4. 令 $\mathfrak{R}$ 是复数的集合，看作实数的子域上向量空間. 証明：映照 $x\to\bar{x}$（复数共軛数）是綫性的，并且决定它关于基 $(1,i)$ 的陣.

**4. 陣的合成**　如前令 $\mathfrak{R}_i(i=1,2)$ 是 $\Delta$ 上 $n_i$ 維向量空間，并且令 $(e_1,e_2,\cdots,e_{n_1})$ 及 $(f_1,f_2,\cdots,f_{n_2})$ 分别是这两个空間的基. 令 $A$ 及 $B$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内的綫性变换，而 $(\alpha)$ 与 $(\beta)$ 分别是这两个变换关于給定基的陣，則

$$e_iA=\sum\alpha_{ij}f_j,\quad e_iB=\sum\beta_{ij}f_j. \tag{10}$$

于是，

$$e_i(A+B)=e_iA+e_iB=\sum(\alpha_{ij}+\beta_{ij})f_j. \tag{11}$$

这証明：$A+B$的陣里每个元素可由把$(\alpha)$与$(\beta)$里在同位置上元素相加而得。因此，我們定义两个$n_1\times n_2$陣$(\alpha)$与$(\beta)$的和是一个$n_1\times n_2$陣，它的$(i,j)$元素是$\alpha_{ij}+\beta_{ij}$. 我們容易驗証：$n_1\times n_2$陣的集合关于这样加法成一个交换羣。事实上，除了記号方面的差别外，这是第一章里提到的結果的特別情形：$n$元組的集合在分量相加的加法下成一个羣。零陣0是每个位置上的元素都是0的陣，而$-(\alpha)$里在$(i,j)$-位置上的元素是$-\alpha_{ij}$. 故(11)里建立的結果——就是說，如果在綫性变换与陣間有对应$A\rightarrow(\alpha)$及$B\rightarrow(\beta)$，則$A+B\rightarrow(\alpha)+(\beta)$——等价于說$A\rightarrow(\alpha)$是羣同构。

次考察第三个向量空間$\mathfrak{R}_3$，它的基是$(g_1, g_2, \cdots, g_{n_3})$. 令$C$是$\mathfrak{R}_2$到$\mathfrak{R}_3$内的一个綫性变换，并且令$(\gamma)$是$C$关于$(f_1, f_2, \cdots, f_{n_2})$，$(g_1, g_2, \cdots, g_{n_3})$的陣，則

$$f_jC=\sum\gamma_{jk}g_k, \tag{12}$$

而

$$e_i(AC)=\left(\sum_j\alpha_{ij}f_j\right)C=\sum_j\alpha_{ij}(f_jC)=\sum_{j,k}\alpha_{ij}\gamma_{jk}g_k. \tag{13}$$

这証明：$AC$的陣里$(i,k)$-位置上的元素是$\sum_j\alpha_{ij}\gamma_{jk}$；所以这个陣是第一章里定义的积$(\alpha)(\gamma)$.

陣乘法的結合律已在第一章的§6里建立了，今証分配律于次：$[(\alpha)+(\beta)](\gamma)$的$(i,k)$-元素是

$$\sum_j(\alpha_{ij}+\beta_{ij})\gamma_{jk},$$

而$(\alpha)(\gamma)+(\beta)(\gamma)$的$(i,k)$-元素是

$$\sum_j\alpha_{ij}\gamma_{jk}+\sum_j\beta_{ij}\gamma_{jk},$$

故由$\Delta$里分配律的成立得

$$[(\alpha)+(\beta)](\gamma)=(\alpha)(\gamma)+(\beta)(\gamma).$$

同理可証

$$(\alpha)[(\beta)+(\gamma)]=(\alpha)(\beta)+(\alpha)(\gamma).$$

我們还应指出：由綫性变换的結合律及分配律容易推得关于陣的

結合律及分配律(参看习題 13 的第 1 題).

其次要說的是:元素在 $\Delta$ 里的 $n_1 \times n_2$ 陣的集合可看作 $\Delta$ 上向量空間(或右向量空間);这是很明显的,因为陣的集合实質上与 $\Delta$ 上 $n_1n_2$-元組的集合相同. 我們照前面办法定义 $\rho(\alpha)$ 是 $n_1 \times n_2$ 陣,它的元素是 $(\alpha)$ 的对应元素的 $\rho$ 倍. 显然这样得的空間是 $n_1n_2$ 維. 如果使用陣与綫性变換間的对应,則可把这个討論移用于 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内的綫性变換的集合 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$. 但除非 $\Delta = \Phi$ 是可交换外,这样得来的 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 里純量乘法与 $\mathfrak{R}_1$ 及 $\mathfrak{R}_2$ 里基的选择是有关的.

另一方面,令 $\Delta = \Phi$,則在 § 2 里已經知道了一种用 $\Phi$ 的元素乘綫性变換的乘法,它与基的选择无关. 积 $\gamma A(\gamma \in \Phi)$ 取为积 $\gamma_l A$,而 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 关于这个合成是 $\Phi$ 上向量空間. 至此,我們注意到,如果 $(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 的一个基,則 $e_i\gamma_l = \gamma e_i$. 所以 $\gamma_l$ 关于这个基的陣是对角陣

$$
\text{(14)} \qquad \operatorname{diag}\{\gamma, \gamma, \cdots, \gamma\} \equiv \begin{bmatrix} \gamma & & 0 \\ & \gamma & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \gamma \end{bmatrix}.
$$

于是,如果 $(\alpha)$ 是 $A$ 关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$, $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_2})$ 的陣,則 $\gamma(\alpha)$ 是 $\gamma A$ 关于这两个基的陣. 这就是說,純量乘法 $\gamma(\alpha)$ 与 $\gamma A$ 对应.

这个結果的另一种說法如次:令 $A \to (\alpha)$ 是把綫性变換 $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 与它关于基 $(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$, $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_2})$ 的陣 $(\alpha)$ 联系起来的对应,則这个对应是向量空間 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 到元素在 $\Phi$ 里的 $n_1 \times n_2$ 陣构成的向量空間上的一种等价;这因为,我們已知 $A \to (\alpha)$ 是一个羣同构,并且已經驗証了 $\gamma A \to \gamma(\alpha)$ 的緣故. 因为陣的空間是 $n_1n_2$-維,所以 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 是 $n_1n_2$-維. 这証明了下面的定理.

**定理 1.** 令 $\mathfrak{R}_i\ (i = 1, 2)$ 是域 $\Phi$ 上 $n_i$-維向量空間,並令 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 內的綫性變換的集合. 定义 $A + B$ 及

$\gamma A(\gamma\in\Phi)$ 如上面所述的那樣，則 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1,\mathfrak{R}_2)$ 是關于这些合成的一个 $n_1n_2$-維向量空間.

現在回到任意的 $\Delta$ 这个情形来考虑，但取 $\mathfrak{R}_1=\mathfrak{R}_2=\mathfrak{R}$，并取 $f_i=e_i$；于是，$(\alpha)$ 是 $A$ 关于基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣. 此时有环 $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$ 到 $n\times n$ 陣的集合 $\Delta_n$ 的对应 $A\rightarrow(\alpha)$. 在 $\Delta_n$ 里引入加法与乘法合成就把这个集合化为环. 我們所得的結果还指出：如果 $A\rightarrow(\alpha)$，$B\rightarrow(\beta)$，則 $A+B\rightarrow(\alpha)+(\beta)$ 及 $AB\rightarrow(\alpha)(\beta)$. 故得重要的

**定理 2.** 令 $\mathfrak{R}$ 是 $\Delta$ 上 $n$ 維向量空間，$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是它的一个基. 如果 $A$ 是 $\mathfrak{R}$ 里一个綫性變換，我們把 $A$ 關于基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣 $(\alpha)$ 与 $A$ 联系起來，則 $A\rightarrow(\alpha)$ 是 $\mathfrak{R}$ 里綫性變換环 $\mathfrak{L}$ 到陣环 $\Delta_n$ 上的一个同構.

### 習 題 13

1. 用綫性变换的乘法的結合性与分配性，証明陣的乘法的对应性质.

**5. 基的改变. 陣的等价及相似** 令 $(\alpha)$ 是 $A\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1,\mathfrak{R}_2)$ 关于基 $(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$，$(f_1, f_2, \cdots, f_{n_2})$ 的陣. 現在我們要改变 $\mathfrak{R}_1$ 及 $\mathfrak{R}_2$ 的基，并且計算 $A$ 关于新基的陣. 今令 $(u_1, u_2, \cdots, u_{n_1})$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 的新基，这里 $u_i=\sum_j \mu_{ij}e_j$，并令 $(v_1, v_2, \cdots, v_{n_2})$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 的新基，这里 $v_p=\sum_q \nu_{pq}f_q$；則陣 $(\mu)$ 与 $(\nu)$ 都是滿秩的，它們的逆陣記作 $(\mu)^{-1}=(\mu^*_{ij})$，$(\nu)^{-1}=(\nu^*_{pq})$. 于是，得

$$\begin{aligned} u_iA &= \left(\sum\mu_{ij}e_j\right)A=\sum\mu_{ij}(e_jA)=\sum\mu_{ij}\alpha_{jp}f_p \\ &= \sum\mu_{ij}\alpha_{jp}\nu^*_{pq}v_q=\sum\tilde{\alpha}_{iq}v_q, \end{aligned}$$

这里

$$\tilde{\alpha}_{iq}=\sum_{j,p}\mu_{ij}\alpha_{jp}\nu^*_{pq}.$$

于是，$A$ 的新陣是

$$(\tilde{\alpha})=(\mu)(\alpha)(\nu)^{-1}, \tag{15}$$

这里 $(\mu)$ 給出 $\mathfrak{R}_1$ 里基的改变，而 $(\nu)$ 給出 $\mathfrak{R}_2$ 里基的改变.

如果对于两个 $n_1\times n_2$ 陣 $(\alpha)$ 及 $(\tilde{\alpha})$，有陣 $(\mu)\in L(\Delta, n_1)$ 及

$(v) \in L(\Delta, n_2)$ 存在，使

(16) $$(\tilde{\alpha}) = (\mu)(\alpha)(v),$$

則說 $(\alpha)$ 与 $(\tilde{\alpha})$ 是等价的(或相伴的). 故知：綫性变换 $A$ 关于两个空間里不同的基的任意两个陣是等价的. 这定理的逆也是显然的. 这因为，令 $(\alpha)$ 与 $(\tilde{\alpha})$ 的关系如(16)，并且令 $A$ 是綫性变换，它关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$ 与 $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_2})$ 的陣是 $(\alpha)$. 則这个綫性变换关于 $(u_1, u_2, \cdots, u_{n_1})$，$(w_1, w_2, \cdots, w_{n_2})$ 的陣是$(\tilde{\alpha})$，这里

$$u_i = \sum_j \mu_{ij} e_j, \quad w_p = \sum_q v^*_{pq} f_q, \quad (v)^{-1} = (v^*_{pq}).$$

次設 $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$，而 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是一个基. 令 $(\alpha)$ 是 $A$ 关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣，則 $e_i A = \sum\limits_j \alpha_{ij} e_j$，而由計算指出，$A$ 关于 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$，$u_i = \sum\limits_j \mu_{ij} e_j$ 的陣是

(17) $$(\tilde{\alpha}) = (\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}.$$

$\Delta_n$ 里这样关系的两个陣叫做是相似的. 也象等价的情形，显然 $\Delta_n$ 里两个陣相似必須而且只須它們都是同一个綫性变换关于 $\Delta$ 上空間 $\mathfrak{R}$ 的两个基的陣.

在下一节里可見，我們容易給出陣的等价的充要条件. 但相似問題却需要很費力的分析，我們将在下一章里处理，这里只解释处理这个問題要使用的方法.

**例.** 我們要証明陣

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (\beta) = \begin{bmatrix} \zeta_1 & & & 0 \\ & \zeta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \zeta_n \end{bmatrix}$$

在 $C_n$ 里相似，这里 $\zeta_i$ 是 1 的 $n$ 个不同的 $n$ 次根，而 $C$ 是复数域. 我們使用 $(\alpha)$ 在 $C$ 上一个 $n$-維向量空間 $\mathfrak{R}$ 里决定一个綫性变换 $A$；办法是在 $\mathfrak{R}$ 里选取一个基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$，并定义 $i < n$ 时，$e_i A = \sum\limits_j \alpha_{ij} e_j = e_{i+1}$，而 $i = n$ 时 $e_i A = e_1$. 于是，要証明我們的結果，就必須找一个基 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 使对于上面定义的 $A$ 有 $u_i A = u_i \zeta_i$. 我們不去詳細論述怎样找出这样的 $u_i$，而来証明：下面的 $u_i$

$$u_i = e_1 + \zeta_i^{-1} e_2 + \zeta_i^{-2} e_3 + \cdots + \zeta_i^{-(n-1)} e_n$$

是适合我們的要求。首先，有

$$u_i A = e_2 + \zeta_i^{-1} e_3 + \cdots + \zeta_i^{-(n-1)} e_1 = \zeta_i u_i.$$

其次，因为 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣是范德曼得陣

$$(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_1^{-1} & \zeta_1^{-2} & \cdots & \zeta_1^{-(n-1)} \\ 1 & \zeta_2^{-1} & \zeta_2^{-2} & \cdots & \zeta_2^{-(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \zeta_n^{-1} & \zeta_n^{-2} & \cdots & \zeta_n^{-(n-1)} \end{bmatrix},$$

这里 $\zeta_i^{-1}$ 都不相同(参看习題7的第1題)，故 $u_i$ 是一个基。这証明了相似性，并且事实上指出 $(\beta) = (\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}$，这里 $(\mu)$ 就是上面写出的陣。

### 習 題 14

1. 証明：等价及相似的关系是反身的、对称的及传递的。
2. 証明：如果 $\Delta$ 的特征数是 0，則下面两个陣在 $\Delta_n$ 里相似：

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (\beta) = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

**6. 綫性变換的秩空間与胞空間** 如果 $A$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 里的一个綫性变換，而 $\mathfrak{S}_1$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 的一个子空間，則由形状如 $x_1 A (x_1 \in \mathfrak{S}_1)$ 的所有向量构成的象 $\mathfrak{S}_1 A$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 的一个子空間。如果 $x_1, y_1 \in \mathfrak{S}_1$，則 $x_1 + y_1 \in \mathfrak{S}_1$，从而 $x_1 A + y_1 A = (x_1 + y_1) A \in \mathfrak{S}_1 A$。如果 $x_1 \in \mathfrak{S}_1$，則还有 $\alpha x_1 \in \mathfrak{S}_1$；所以，$\alpha(x_1 A) = (\alpha x_1) A \in \mathfrak{S}_1 A$。如果向量 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 是 $\mathfrak{S}_1$ 的生成元素，則 $\mathfrak{S}_1$ 里任意元素 $x_1$ 可表达为形状 $\sum \xi_i f_i$。所以，任意 $x_1 A = \sum \xi_i (f_i A)$。故象向量 $f_1 A, f_2 A, \cdots, f_m A$ 都是 $\mathfrak{S}_1 A$ 的生成元素。如果 $f_i$ 构成 $\mathfrak{S}_1$ 的一个基，則 $m = \dim \mathfrak{S}_1$。象 $f_i A$ 不必成为 $\mathfrak{S}_1 A$ 的一个基，但无論如何它們总是生成元素，所以它們的个数 $m \geqslant \dim \mathfrak{S}_1 A$。故知，象空間的維数不超过原来空間的維数。

$\mathfrak{R}_2$ 的子空間 $\mathfrak{R}_1 A$ 叫做 $A$ 的**秩空間**；它的維数叫做 $A$ 的秩。如果 $(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 的基，則 $\mathfrak{R}_1 A = [e_1 A, e_2 A, \cdots, e_{n_1} A]$ 是由向量 $e_i A$ 生成的空間。所以，$A$ 的秩是集合 $(e_1 A, e_2 A, \cdots, e_{n_1} A)$ 的秩。如果 $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_2})$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 的一个基，而 $e_i A = \sum\limits_{j} \alpha_{ij} f_j$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，則集合 $(e_1 A, e_2 A, \cdots, e_{n_1} A)$ 的秩

与$A$关于基$(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$, $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_2})$的陣的行秩相等. 这証明了下面的定理.

**定理 3.** 向量空間的一个綫性變換的秩等于$A$的任意一个陣的行秩.

其次考虑$\mathfrak{R}_1$里能使$zA=0$的向量$z$的全体$\mathfrak{N}$. 容易驗証: $\mathfrak{N}$是$\mathfrak{R}_1$的一个子空間. 我們叫它做$A$的**朒空間**,它的維数叫做$A$的朒. 今証关于$A$的秩及朒的主要定理.

**定理 4.** $A$的秩$+A$的朒$=$空間$\mathfrak{R}_1$的維數$n_1$.

証 令$(z_1, z_2, \cdots, z_\nu)$是$\mathfrak{N}$的一个基,则我們可以$n_1-\nu$个向量$x_i$补充这个基使$(x_1, \cdots, x_{n_1-\nu}; z_1, z_2, \cdots, z_\nu)$成为$\mathfrak{R}_1$的基. 向量

$$x_1A, x_2A, \cdots, x_{n_1-\nu}A, z_1A, z_2A, \cdots, z_\nu A$$

是秩空間$\mathfrak{R}_1A \subseteq \mathfrak{R}_2$的生成元素. 因为$z_iA=0$, 所以向量$x_1A, \cdots, x_{n_1-\nu}A$也是$\mathfrak{R}_1A$的生成元素. 又因为,如果

$$\beta_1(x_1A)+\beta_2(x_2A)+\cdots+\beta_{n_1-\nu}(x_{n_1-\nu}A)=0,$$

则$(\sum\beta_ix_i)A=0$,而$\sum\beta_ix_i\in\mathfrak{N}=[z_1, z_2, \cdots, z_\nu]$. 但集合$(x_1, \cdots, x_{n_1-\nu}, z_1, \cdots, z_\nu)$是一个綫性无关的集合,故推知所有$\beta_i$都等于0; 因此,向量$x_1A, \cdots, x_{n_1-\nu}A$是綫性无关的. 所以,如果令$y_i=x_iA$, 则$(y_1, y_2, \cdots, y_{n_1-\nu})$是$\mathfrak{R}_1A$的一个基. 故$\dim\mathfrak{R}_1A=n_1-\nu=n_1-(A$的朒$)$. 定理就証明了.

今把$\mathfrak{R}_1A$的基$(y_1, y_2, \cdots, y_{n_1-\nu})$补充成$\mathfrak{R}_2$的一个基$(y_1, y_2, \cdots, y_{n_1-\nu}, w_1, w_2, \cdots, w_{n_2-n_1+\nu})$,则得关系

$$x_iA=y_i \quad (i=1, 2, \cdots, \rho\equiv n_1-\nu),$$
$$z_jA=0 \quad (j=1, \cdots, \nu).$$

这就証明了$A$关于基$(x_1, \cdots, x_\rho, z_1, \cdots, z_\rho)$, $(y_1, \cdots, y_\rho, w_1, \cdots, w_{n_2-\rho})$的陣是

$$\text{diag}\,\{\overbrace{1, \cdots, 1}^{\rho}, 0, \cdots, 0\}^{1)}. \tag{18}$$

1) 我們使用(14)里引入的这个記法来表示一个陣,它的非零元素仅出現在(1, 1), (2, 2), $\cdots$位置上.

如果这两个基关于原来基 $(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$ 及 $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_2})$ 的陣順序是 $(\mu)$ 及 $(\nu)$，則由前节的結果知 $(\mu)(\alpha)(\nu)^{-1}$ 是陣(18)．个数 $\rho$ 是陣 $(\alpha)$ 的行秩．这証明了下面的定理．

**定理 5.** 如果 $(\alpha)$ 是元素在可除环 $\Delta$ 里的一个 $n_1 \times n_2$ 陣，而 $(\alpha)$ 有行秩 $\rho$，則 $(\alpha)$ 与(18)里給出的陣等价．

如果 $(\alpha)$ 与 $(\tilde{\alpha})$ 是等价陣，則可知它們得作为同一个綫性变换 $A$ 的陣．$(\alpha)$ 的行秩及 $(\tilde{\alpha})$ 的行秩都与 $A$ 的秩相等，因此等价陣有相同的行秩．反过来，如果 $(\alpha)$ 与 $(\tilde{\alpha})$ 有相同的行秩 $\rho$，則这两个陣都与同一个陣(18)等价；所以它們也是等价的．

**定理 6.** 元素在可除环 $\Delta$ 里的兩个 $n_1 \times n_2$ 陣是等价的必須而且只須它們有相同的行秩．

今考虑 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内的一个綫性变换 $A$ 是等价的条件．因为 $A$ 是一个同态，所以 $A$ 是 1—1 的必須而且只須它的核 $\mathfrak{N} = 0$．显然 $\mathfrak{N}$ 是 $A$ 的朒空間．所以，$A$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 上的一个 1—1 变换必須而且只須：(1) $\mathfrak{N} = 0$；(2) $\mathfrak{R}_1 A = \mathfrak{R}_2$．在 $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$ 这一个特殊情形，这两个条件中只要随便取一个就够了；这因为，如果 $\mathfrak{N} = 0$，則 $A$ 的秩 $= \dim \mathfrak{R} = n$．故 $\mathfrak{R}A = \mathfrak{R}$．另一方面，如果 $\mathfrak{R}A = \mathfrak{R}$，則 $A$ 的秩 $= n$，而 $A$ 的朒 $= 0$．所以，$\mathfrak{N} = 0$．

必須指出，如果 $A$ 是等价的，則它的逆变换 $A^{-1}$ 也是等价的；这事实让讀者来証明．一个向量空間到它自身上的等价关于积运算构成一个羣．如果 $A$ 是 $\mathfrak{R}$ 里一个綫性变换，而 $(\alpha)$ 是它关于基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣，則 $A$ 在 $\mathfrak{R}$ 里是一个等价必須而且只須 $(\alpha)$ 是一个单位．故知，$\mathfrak{R}$ 里等价的羣与 $\Delta_n$ 里滿秩陣的羣 $L(\Delta, n)$ 同构．前者叫做向量空間 $\mathfrak{R}$ 里的**全体綫性羣**．

### 習　題　15

1. 証明：如果 $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 而 $\mathfrak{S}_1$ 与 $\mathfrak{U}_1$ 都是 $\mathfrak{R}_1$ 的子空間，則
$$(\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{U}_1)A = \mathfrak{S}_1 A + \mathfrak{U}_1 A, \quad (\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{U}_1)A \subseteq \mathfrak{S}_1 A \cap \mathfrak{U}_1 A.$$

2. 証明：如果 $(\alpha)$ 及 $(\beta)$ 是元素在 $\Delta$ 里的 $m \times n$ 陣，則 $[(\alpha) + (\beta)]$ 的(行)秩 $\leqslant (\alpha)$ 的秩 $+ (\beta)$ 的秩．

3. 証明：如果 $(\alpha)$ 是一个 $m \times n$ 陣，而 $(\beta)$ 是一个 $n \times p$ 陣，它們的元素都在 $\Delta$ 里，則

$$(\alpha)(\beta) \text{ 的秩} \leqslant \min((\alpha) \text{ 的秩}, (\beta) \text{ 的秩}).$$

4. 如果

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求单位$(\mu)$及$(\nu)$使$(\mu)(\alpha)(\nu)$成为(18)的形状.

5. (費廷 Fitting). 如果 $A$ 是 $\mathfrak{R}$ 里一个綫性变换, 令 $\mathfrak{Z}$ 是对于某个 $m$ 能使 $zA^m = 0$ 的向量 $z$ 的集合, 并且令 $\mathfrak{S}$ 是所有秩空間 $\mathfrak{R}A^k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 的交. 証明: $\mathfrak{Z}$ 及 $\mathfrak{S}$ 都是子空間,并証明 $\mathfrak{R} = \mathfrak{Z} \oplus \mathfrak{S}$.

6. 証明: $A$ 把第5題的 $\mathfrak{Z}$ 及 $\mathfrak{S}$ 映到它們自身內; $A$ 在 $\mathfrak{Z}$ 里是无势的, 而在 $\mathfrak{S}$ 里是一个等价. 应用这个結果証明: $\Delta_n$ 里任意陣与形状如

$$\begin{bmatrix} (\beta) & 0 \\ 0 & (\gamma) \end{bmatrix}$$

的陣相似,这里 $(\beta)$ 是无势的,而 $(\gamma)$ 是滿秩的.

**7. 綫性方程組** 設有左手綫性方程組

$$(19)\qquad \begin{aligned} \xi_1\alpha_{11} + \xi_2\alpha_{21} + \cdots + \xi_n\alpha_{n1} &= \delta_1, \\ \xi_1\alpha_{12} + \xi_2\alpha_{22} + \cdots + \xi_n\alpha_{n2} &= \delta_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ \xi_1\alpha_{1m} + \xi_2\alpha_{2m} + \cdots + \xi_n\alpha_{nm} &= \delta_m, \end{aligned}$$

这里 $\alpha_{ij}$ 及 $\delta_i$ 都是可除环 $\Delta$ 里給定的元素, 我們要在 $\Delta$ 里找出解 $\xi_i = \beta_i$. 如果 $\xi_i = \beta_i$ 适合这些方程, 則說 $n$-元組 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 是一个解. 如果 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 及 $(\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_n)$ 是(19)的两个解, 則 $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$ 是在(19)里取 $\delta_i = 0$ 所得齐次方程組的一个解,这里 $\gamma_i = \beta'_i - \beta_i$. 反过来,如果 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 是(19)的一个解, 而 $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$ 是齐次方程組的一个解, 則 $(\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_n)$ 是(19)的另一个解,这里 $\beta'_i = \beta_i + \gamma_i$. 这就証明了:如果(19)有解,則我們要得出(19)的解是求这个方程組的一个特殊解,及对应齐次方程組的所有解,然后把齐次方程組的所有解加到这个特殊解去,就得(19)的所有解.

所以,我們首先要考察(19)的解的存在問題. 引入向量 $u_i = \sum_j \alpha_{ij}f_j$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$; $v = \sum_j \delta_j f_j$, 这里 $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 是 $m$ 維空間 $\mathfrak{S}$ 的一个基. 則立即知 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 是(19)的一个解必須而且只須 $\beta_i$ 适合

$$(20)\qquad v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n.$$

所以(19)是可解的必須而且只須 $v$ 是关于 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 綫性相

关的. 另一方面, $v$ 关于 $u_i$ 綫性相关必須而且只須

$$(u_1, u_2, \cdots, u_n)\text{的秩} = (u_1, u_2, \cdots, u_n, v)\text{的秩},$$

而这个等式要成立必須而且只須陣 $(\alpha)$ 的行秩等于增广陣

$$(21) \qquad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \\ \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_m \end{bmatrix}$$

的秩. 特别是,如果 $\Delta = \Phi$ 是可交換的,則有下面的

**定理 7.** 如果綫性方程組(19)的 $\alpha_{ij}$ 及 $\delta_j$ 在域 $\Phi$ 里, 則(19)在 $\Phi$ 里有一个解 $\xi_i = \beta_i$ 必須而且只須系數的陣$(\alpha)$与增广陣(21)有相同的行列式秩.

其次考慮取 $\delta_j = 0$ 所得的齐次綫性方程組. 要討論这个方程組, 我們引进以 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 为基的一个 $n$ 維向量空間 $\mathfrak{R}$, 并且令 $A$ 是綫性变換,它关于基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$, $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 的陣是$(\alpha)$, 則按上面的記法,向量 $u_i = e_iA$, 而 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 构成齐次方程組的一个解必須而且只須 $\sum\beta_iu_i = 0$. 因为 $u_i = e_iA$, 这就等于条件 $(\sum\beta_ie_i)A = 0$. 所以, $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 是一个解必須而且只須 $\sum\beta_ie_i$ 在 $A$ 的朒空間 $\mathfrak{N}$ 里. 如果 $\nu$ 是 $A$ 的朒,則有 $\mathfrak{N}$ 的一个基 $(z_1, z_2, \cdots, z_\nu)$; 如果 $z_k = \sum\beta_i^{(k)}e_i$ $(k = 1, 2, \cdots, \nu)$, 則

$$(\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \cdots, \beta_n^{(1)}), \cdots, (\beta_1^{(\nu)}, \beta_2^{(\nu)}, \cdots, \beta_n^{(\nu)})$$

是齐次方程組的(左)綫性无关解的一个集合. 任意解 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 是这些解的綫性組合. 由于秩与朒間的关系知 $\nu = n - \rho$, 这里 $\rho$ 是陣$(\alpha)$的行秩. 故得下面結果:

**定理 8.** 令 $\sum_{i=1}^{n} \xi_i\alpha_{ij} = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ 是左手齊次方程組,并且令 $(\alpha)$ 的行秩为 $\rho$, 則有 $n-\rho$ 个綫性无關解 $(\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \cdots, \beta_n^{(k)})$ $(k = 1, 2, \cdots, n-\rho)$ 存在使方程組的任意解是这些解的一个左綫性組合.

这个定理的一个直接推論是說[1]：含有多于 $m$ 个未知量的 $m$ 个齐次方程組有一个非全零解．必須指出，在可交換的情形，上面命題里的“左”字可以删去，并且用行列式秩来代替秩．

### 習 題 16

1．設取 $\Delta$ 为有理数域，求下面方程組所有的解：

$$2\xi_1-\xi_2+\xi_3-3\xi_4=0,$$
$$\xi_1+\xi_2-\xi_3+2\xi_4=0,$$
$$4\xi_1+\xi_2-\xi_3+\ \xi_4=0.$$

**8．右向量空間里的綫性变換** 如果 $\mathfrak{R}_1'$ 及 $\mathfrak{R}_2'$ 是右向量空間，则定义 $\mathfrak{R}_1'$ 到 $\mathfrak{R}_2'$ 内的一个綫性变換为 $\mathfrak{R}_1'$ 到 $\mathfrak{R}_2'$ 内一个映照使

$$(x'+y')A=x'A+y'A,\quad (x'\alpha)A=(x'A)\alpha, \tag{22}$$

对于 $\mathfrak{R}_1'$ 里所有 $x'$, $y'$ 及 $\Delta$ 里所有 $\alpha$ 都成立．关于左向量空間的討論可通过一二記法上的改变而轉移于右向量空間上．如果 $(e_1', e_2', \cdots, e_{n_1}')$ 及 $(f_1', f_2', \cdots, f_{n_2}')$ 順序是 $\mathfrak{R}_1'$ 及 $\mathfrak{R}_2'$ 的基，命

$$e_i'A=\sum_{j=1}^{n_2} f_j'\alpha_{ji}\quad (i=1, 2, \cdots, n_1), \tag{23}$$

并把

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n_2} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n_11} & \alpha_{n_12} & \cdots & \alpha_{n_1n_2} \end{bmatrix} \tag{24}$$

叫做綫性变換 $A$ 关于給定的基的陣．应該指出，(24)是(23)的右端的系数陣的折轉陣．与前此一样，陣的和对应于綫性变换的和．但积的情形与在左向量空間的情形不同．設 $(g_1', g_2', \cdots, g_{n_3}')$ 是 $\mathfrak{R}_3'$ 的一个基，并且令 $B$ 是 $\mathfrak{R}_2'$ 到 $\mathfrak{R}_3'$ 内的一个綫性变換．令 $(\beta)$ 是 $B$ 关于基 $(f_1', f_2', \cdots, f_{n_2}')$，$(g_1', g_2', \cdots, g_{n_3}')$ 的陣，則

$$f_j'B=\sum g_k'\beta_{kj}\quad (j=1, 2, \cdots, n_2).$$

所以，

$$e_i'AB=\left(\sum_j f_j'\alpha_{ji}\right)B=\sum_j (f_j'B)\alpha_{ji}=\sum_{j,k} g_k'\beta_{kj}\alpha_{ji}=\sum g_k'\gamma_{ki},$$

---

1) 参看习題 3 的第 3 題．

这里 $\gamma_{ki}=\sum_j \beta_{kj}\alpha_{ji}$. 因此，$C=AB$ 的陣是积 $(\beta)(\alpha)$，而不是前面的 $(\alpha)(\beta)$.

如果 $\mathfrak{L}'=\mathfrak{L}'(\mathfrak{R}',\mathfrak{R}')$ 表示 $\mathfrak{R}'$ 到它自身内的綫性变换环，則綫性变换与它們关于一定的基 $(e_1',e_2',\cdots,e_n')$ 的陣之間的对应 $A\to(\alpha)$ 現在是一个反自同构. 所以，它是1—1的，并且陣的和对应于綫性变换的和，但与綫性变换的积对应的是对应陣取逆序的积. 环 $\mathfrak{L}'$ 与陣环 $\Delta_n$ 成反同构，所以也与 $\Delta$ 上 $n$ 維左向量空間里綫性变换环 $\mathfrak{L}$ 成反同构.

基由 $(e_1',e_2',\cdots,e_{n_1}')$ 改变为 $(u_1',u_2',\cdots,u_{n_1}')$，这里 $u_i'=\sum e_j'\mu_{ji}$，及基由 $(f_1',f_2',\cdots,f_{n_2}')$ 改变为 $(v_1',v_2',\cdots,v_{n_2}')$，这里 $v_p'=\sum f_q'v_{qp}$，反映在 $A$ 的陣的改变是由 $(\alpha)$ 变为

$$(\tilde{\alpha})=(v)^{-1}(\alpha)(\mu).$$

如果在 $\mathfrak{R}_1'=\mathfrak{R}_2'=\mathfrak{R}'$ 里单使用一个基，則把基改变后，$A$ 的陣 $(\alpha)$ 就被它的相似陣 $(\mu)^{-1}(\alpha)(\mu)$ 所代替，这里 $(\mu)$ 給出基的改变.

前此关于秩及胸的討論可以不用改变而移到右向量空間里来. $A$ 的秩現在是它的陣的列秩. 由此可見等价陣不但有相同的行秩，也有相同的列秩. 我們已知，任意陣 $(\alpha)$ 必与一个“范”式(18)等价. 又由定义直接知：陣的范式有相同的行秩与列秩. 所以，任意陣 $(\alpha)$ 的行秩与列秩相同. 这个結果今述为

**定理 9.** 任意陣的行秩与列秩相同.

这个結果的更接近几何的另一証明見于 § 12. 末了，我們要提到的是：右手綫性方程組的理論可完全按上面关于左手方程組的理論作类似的发展，只要用右向量空間代替左向量空間就可以了.

## 習 題 17

1. 就右手方程組敍述定理 7 的类似定理，并作証明.

**9. 綫性函数** 我們在向量空間 $\mathfrak{R}$ 上曾定义綫性函数为 $\mathfrak{R}$ 到 $\Delta$ 内的一个映照 $x\to f(x)$，使

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad f(\alpha x)=\alpha f(x).$$

如果我們按慣例用

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

来定义两个这样映照的和,并且用

$$(f\mu)(x)=f(x)\mu$$

定义积 $f\mu$,这里 $\mu\in\Delta$;则得 $\Delta$ 上一个右向量空間 $\mathfrak{R}^*$. 这个結果可以直接驗証的; 但把这个結果納入 §2 所論述的綫性变换的一般理論中,则更易領悟.

为着这个目的,我們要記住:一个綫性函数恰是 $\mathfrak{R}$ 到一維向量空間 $\Delta$ 内的一个綫性变換. 在向量空間 $\Delta$ 里,因为右乘变换 $\mu_r:\xi\rightarrow\xi\mu$ 使

$$(\xi+\eta)\mu_r=(\xi+\eta)\mu=\xi\mu+\eta\mu=\xi\mu_r+\eta\mu_r,$$
$$(\alpha\xi)\mu_r=(\alpha\xi)\mu=\alpha(\xi\mu)=\alpha(\xi\mu_r),$$

故右乘变换 $\mu_r$ 是向量空間 $\Delta$ 里一个綫性变換. 我們还知,$\mathfrak{R}$ 到 $\Delta$ 内的綫性变换的集合在加法下是一个交換羣,而 $\mathfrak{R}$ 到 $\Delta$ 内的一个綫性变换与 $\Delta$ 到它自身内的一个綫性变换的积是 $\mathfrak{R}$ 到 $\Delta$ 内的一个綫性变換. 所以,如果 $f$, $g\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\Delta)$, 則 $f+g$ 及 $f\mu_r\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\Delta)$. 因为上面給出的 $f\mu$ 的定义只是积 $f\mu_r$,故

$$(f+g)\mu=(f+g)\mu_r=f\mu_r+g\mu_r=f\mu+g\mu,$$
$$f(\mu+\nu)=f(\mu+\nu)_r=f(\mu_r+\nu_r)=f\mu_r+f\nu_r=f\mu+f\nu,$$
$$f(\mu\nu)=f(\mu\nu)_r=f(\mu_r\nu_r)=(f\mu_r)\nu_r=(f\mu)\nu,$$
$$f1=f1_r=f.$$

这証明了上面的論断:綫性函数的集合 $\mathfrak{R}^*$ 是 $\Delta$ 上右向量空間. 我們叫它做向量空間 $\mathfrak{R}$ 的**共軛空間**.

今設 $\mathfrak{R}$ 是有限維向量空間,有基为 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$, 則綫性函数 $f$ 可由值 $f(e_i)=\alpha_i$ 完全决定. 不仅如此,对于任意 $\alpha_i\in\Delta$, 必有一个綫性函数存在使 $f(e_i)=\alpha_i$. 如果 $x=\sum\xi_i e_i$,則 $f(x)=\sum\xi_i\alpha_i$. 我們还可把这些結果用陣述出如次:如果 $f$ 是一个綫性函数,并且 $f(e_i)=\alpha_i$,則可使用 $\Delta$ 里的基 1,而記 $f(e_i)=\alpha_i 1$. 于是,我們知道,$f$ 关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$, (1)的陣是

(25) $$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

这样我們就在 $\Re^*$ 与元素在 $\Delta$ 里的 $n\times 1$ 陣的集合間得出一个 1—1 对应. 在这个对应下,和也保持对应. 我們还立知,如果 $f$ 有陣(25),則 $f\mu$ 有陣为

$$\begin{bmatrix} \alpha_1\mu \\ \alpha_2\mu \\ \vdots \\ \alpha_n\mu \end{bmatrix}.$$

由此显見, $\Re^*$ 与 $n$-元組(这里写作列)的右向量空間等价. 故知 $\Re^*$ 是 $\Delta$ 上 $n$ 維向量空間.

依下面方法导出上面結果可更見明晰. 如果 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\Delta$ 上 $\Re$ 的一个基,我們用方程

(26) $$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

来定义綫性函数的一个集合 $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$, 这里 $i\neq j$ 时, $\delta_{ij}=0$,而 $i=j$ 时 $\delta_{ii}=1$. 則关于 $e_j$ 的綫性函数 $\sum e_i^*\alpha_i$ 的值是

$$\sum_i e_i^*\alpha_i(e_j) = \sum_i e_i^*(e_j)\alpha_i = \alpha_j \quad (j=1, 2, \cdots, n),$$

并且由此可推知, $e_i^*$ 构成 $\Delta$ 上 $\Re^*$ 的一个基. 为此,如果 $f$ 是任意綫性函数,而 $f(e_j)=\alpha_j$,則 $f$ 与 $\sum e_i^*\alpha_i$ 对于 $e_j$ 有同一的值. 于是, $f=\sum e_i^*\alpha_i$. 次令 $\sum e_i^*\alpha_i=0$,則由上面方程指出每个 $\alpha_j=0$; 故知 $e_i^*$ 是綫性无关的. 基 $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ 叫做 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的余基. 这样的基在后面占重要的地位.

### 習 題 18

1. 証明:右乘变换是向量空間 $\Delta$ 里的唯一綫性变换.

**10. 有限維空間与它的共軛空間之間的对偶性** 令 $x$ 是空間 $\Re$ 里一个固定向量, 并令 $f$ 周历 $\Re$ 的共軛空間 $\Re^*$. 則映照 $f\to f(x)$ 是 $\Re^*$ 到 $\Delta$ 内的一个映照. 为着強調表示我們是在处理 $f\in\Re^*$ 的函数,所以用 $x(f)$ 来代替 $f(x)$. 因为

$$x(f+g)=(f+g)x=f(x)+g(x)=x(f)+x(g),$$
$$x(f\alpha)=(f\alpha)(x)=f(x)\alpha=x(f)\alpha,$$
故 $x(f)$ 是綫性的. 故知,每个向量 $x\in\mathfrak{R}$ 决定定义在 $\mathfrak{R}^*$ 上的綫性函数的(左)向量空間 $\mathfrak{R}^{**}$ 的一个元素 $x(f)$.

其次,考虑 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{R}^{**}$ 内的映照 $x\to x(f)$ 的性質. 首先,因为
$$(x+y)(f)=f(x+y)=f(x)+f(y)=x(f)+y(f),$$
这說明与 $x+y$ 連帯的函数是 $x(f)$ 与 $y(f)$ 的和. 又因为
$$(\alpha x)(f)=f(\alpha x)=\alpha f(x)=\alpha x(f),$$
故与 $\alpha x$ 連帯的綫性函数是与 $x$ 連帯的綫性函数的 $\alpha$ 倍. 所以,这个映照是 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{R}^{**}$ 内的綫性变换. 次証: $x\to x(f)$ 是1—1 的,这只要証明: 如果对于所有 $f$ 使 $x(f)=0$, 则 $x=0$. 这是显然的;因为,如果 $x\neq 0$, 则可取 $x$ 作为基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的第一个向量 $e_1$. 我們已知,对于任意給定的 $\alpha_i$,有一个綫性函数 $f$ 存在使 $f(e_i)=\alpha_i$. 特別是,可找到一个 $f$ 使 $f(x)=f(e_1)\neq 0$.

至此, 我們已經証明了映照 $x\to x(f)$ 是 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{R}^{**}$ 内的一个1—1 綫性变换. 所以,如果 $\mathfrak{S}$ 表示象空間,则 $\dim\mathfrak{S}=\dim\mathfrak{R}=n$. 另一方面,我們已知, $\dim\mathfrak{R}=\dim\mathfrak{R}^*=\dim\mathfrak{R}^{**}$. 故 $\dim\mathfrak{S}=\dim\mathfrak{R}^{**}$. 这自然可推出 $\mathfrak{S}=\mathfrak{R}^{**}$. 因此得到有力的結論: $\mathfrak{R}^*$ 上每个綫性函数可从 $\mathfrak{R}$ 里某一个向量 $x$ 的 $x(f)$ 得出. 这就是重要的**对偶原理**: $\mathfrak{R}$ 可使与 $\mathfrak{R}^*$ (上綫性函数的空間) 的共軛空間重合. 作为这个結果的第一个应用,我們来証明下面的定理.

**定理 10.** 如果 $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的一个基, 则 $\mathfrak{R}$ 有一个基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 存在使 $e_i^*(e_j)=\delta_{ij}$.

証 我們已知,在 $\mathfrak{R}^{**}$ 里可找到一个基 $(e_1^{**}, e_2^{**}, \cdots, e_n^{**})$,它是給定的基 $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ 的余基,亦即 $e_i^{**}(e_j^*)=\delta_{ij}$. 但在 $\mathfrak{R}$ 里存在有向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 使 $e_j^*(e_i)=e_i^{**}(e_j^*)(i, j=1, 2, \cdots, n)$,这些向量适合定理的要求.

其次要証: $\mathfrak{R}$ 的子空間与 $\mathfrak{R}$ 的共軛空間 $\mathfrak{R}^*$ 的子空間之間的互反关系. 如果 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子空間,令 $j(\mathfrak{S})$ 是向量 $g\in\mathfrak{R}^*$ 的全体, 它对于 $\mathfrak{S}$ 里所有 $y$ 能使 $g(y)=0$ 的. 显然集合 $j(\mathfrak{S})$ 是

$\mathfrak{R}^*$ 的一个子空間,我們叫它做与 $\mathfrak{S}$ 关联的 $\mathfrak{R}^*$ 的子空間. 同理,如果 $\mathfrak{S}^*$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的一个子空間,则得与 $\mathfrak{S}^*$ 关联的子空間 $j(\mathfrak{S}^*)$. 这个子空間由对于所有 $g \in \mathfrak{S}^*$ 能使 $g(y) = 0$ 的向量 $y$ 构成. 如果 $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_2$, 显然 $j(\mathfrak{S}_1) \subseteq j(\mathfrak{S}_2)$, 就是說,对应 $\mathfrak{S} \to j(\mathfrak{S})$ 是 $\mathfrak{R}$ 的子空間的格 $L(\mathfrak{R})$ 到 $\mathfrak{R}^*$ 的子空間的格 $L(\mathfrak{R}^*)$ 的反序对应. 显然还有 $j(j(\mathfrak{S})) \supseteq \mathfrak{S}$. 次証下面的引理.

**引理** 对于任意 $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}$, $\dim j(\mathfrak{S}) = n - \dim \mathfrak{S}$, 而对于任意 $\mathfrak{S}^* \subseteq \mathfrak{R}^*$, $\dim j(\mathfrak{S}^*) = n - \dim \mathfrak{S}^*$.

証 由于 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}^*$ 間的对偶性, 所以只要証明引理的前半段說法就够了. 令 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子空間,并令 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基,使 $(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个基. 令 $(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*)$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的余基. 今設 $g = \sum u_i^* \beta_i \in j(\mathfrak{S})$,则 $(\sum u_i^* \beta_i)(u_j) = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, r)$. 但 $(\sum u_i^* \beta_i)(u_j) = \beta_j$, 故 $g = \sum_{r+1}^{n} u_i^* \beta_i$. 反过来,任意綫性形式 $g = \sum_{r+1}^{n} u_i^* \beta_i$ 适合 $g(u_j) = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, r)$. 故对于每个 $y \in \mathfrak{S}$,也有 $g(y) = 0$. 于是, $j(\mathfrak{S}) = [u_{r+1}^*, u_{r+2}^*, \cdots, u_n^*]$. 所以, $\dim \mathfrak{S} = r$,而 $\dim j(\mathfrak{S}) = n - r$.

这个引理的一个直接推論是: 对于任意 $\mathfrak{S}$ 及 $\mathfrak{S}^*$, $j(j(\mathfrak{S})) = \mathfrak{S}$ 及 $j(j(\mathfrak{S}^*)) = \mathfrak{S}^*$. 这因为, 已知 $j(j(\mathfrak{S})) \supseteq \mathfrak{S}$; 并且如果 $\dim \mathfrak{S} = r$,则 $\dim j(j(\mathfrak{S})) = n - (n - r) = r = \dim \mathfrak{S}$, 由此就推得 $\mathfrak{S} = j(j(\mathfrak{S}))$.

故知, 映照 $\mathfrak{S} \to j(\mathfrak{S})$ 是 $L(\mathfrak{R})$ 到 $L(\mathfrak{R}^*)$ 上的一个 1—1 映照. 如果 $j(\mathfrak{S}_1) = j(\mathfrak{S}_2)$, 则 $\mathfrak{S}_1 = j(j(\mathfrak{S}_1)) = j(j(\mathfrak{S}_2)) = \mathfrak{S}_2$; 而且如果 $\mathfrak{S}^*$ 是 $L(\mathfrak{R}^*)$ 的任意元素,则 $\mathfrak{S}^* = j(\mathfrak{S})$,这里 $\mathfrak{S} = j(\mathfrak{S}^*)$.

## 習 題 19

1. 証明: 如果 $\mathfrak{S} \to \bar{\mathfrak{S}}$ 是一个格到另一个格上的一个 1—1 反序对应, 则 $\overline{\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2} = \bar{\mathfrak{S}}_1 \cap \bar{\mathfrak{S}}_2$, 而 $\overline{\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2} = \bar{\mathfrak{S}}_1 + \bar{\mathfrak{S}}_2$.

2. 令 $f$ 是 $\mathfrak{R}$ 上一个綫性函数,而 $\bar{f}$ 表示 $f$ 在 $\mathfrak{R}$ 的子空間 $\mathfrak{S}$ 上的短縮, 亦即 $\bar{f}$ 是映照 $y \to f(y)$,这里 $y \in \mathfrak{S}$. 証明: 映照 $f \to \bar{f}$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 到 $\mathfrak{S}$ 上綫性函数的空間 $\mathfrak{S}^*$ 内的一个綫性变换. 証明: $j(\mathfrak{S})$ 是这个变换的胭空間;并証明 $f \to \bar{f}$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 到 $\mathfrak{S}^*$ 上的

一个映照.

3. 証明:如果 $e_1^*, e_2^*, \cdots, e_r^*$ 是綫性无关的綫性函数,则有向量 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 存在,使 $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, r)$.

**11. 綫性变换的折轉** 令 $A$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 的一个綫性变换,并令 $f$ 是定义在 $\mathfrak{R}_2$ 上的一个綫性函数,则映照 $x_1 \to f(x_1A)$ 是定义在 $\mathfrak{R}_1$ 上的一个綫性函数;理由,因为这个映照不过是 $A$ 与 $f$ 的积,亦即

$$(27)\qquad (Af)(x_1) = f(x_1A).$$

今令 $f$ 在 $\mathfrak{R}_2$ 的共軛空間 $\mathfrak{R}_2^*$ 上变,则得 $\mathfrak{R}_2^*$ 到 $\mathfrak{R}_1^*$ 内的一个映照 $f \to Af$. 由分配律得

$$A(f+g) = Af + Ag$$

及由結合律得

$$A(f\mu) = A(f\mu_r) = (Af)\mu_r = (Af)\mu,$$

故知这个映照是綫性的;我們把 $\mathfrak{R}_2^*$ 到 $\mathfrak{R}_1^*$ 内的这个綫性变换 $f \to Af$ 叫做 $A$ 的折轉,記做 $A^*$. 于是 $fA^* = Af$,这里右端的 $Af$ 是 $A$ 与 $f$ 的积.

其次,考虑映照 $A \to A^*$ 的性質. 首先,如果 $B$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 的另一个綫性变换,则 $A + B \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$,

$$\begin{aligned} f(A+B)^* &= (A+B)f = Af + Bf \\ &= fA^* + fB^* = f(A^* + B^*). \end{aligned}$$

故得

$$(28)\qquad (A+B)^* = A^* + B^*.$$

今令 $\mathfrak{R}_3$ 是第三个向量空間,并令 $C$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 到 $\mathfrak{R}_3$ 内的一个綫性变换,则 $AC \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_3)$. 所以,如果 $h \in \mathfrak{R}_3^*$,则 $h(AC)^* = (AC)h \in \mathfrak{R}_1^*$. 另一方面,

$$\begin{aligned} h(AC)^* &= (AC)h = A(Ch) = A(hC^*) \\ &= (hC^*)A^* = h(C^*A^*), \end{aligned}$$

这就証明了

$$(29)\qquad (AC)^* = C^*A^*.$$

这些結果当然也适用于右向量空間. 特别是 如果 $A$ 是綫

性函数的右向量空間 $\mathfrak{R}_2^*$ 到右向量空間 $\mathfrak{R}_1^*$ 内的一个綫性变換，則我們可把 $\mathfrak{R}_1^{**}$ 到 $\mathfrak{R}_2^{**}$ 内的折轉变換与它联系起来，这里 $\mathfrak{R}_i^{**}$ 是 $\mathfrak{R}_i^*$ 上綫性函数的左向量空間. 另一方面，我們有 $\mathfrak{R}_i^{**}$ 到 $\mathfrak{R}_i$ 上的自然等价，而这些使我們能够定义 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内与 $A^*$ 的折轉成对应的一个綫性变換. 这个变換叫做在 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 里 $A^*$ 的折轉 $A^{**}$. 今决定 $\mathfrak{R}_2^*$ 到 $\mathfrak{R}_1^*$ 内的給定綫性变換 $A^*$ 的变換 $A^{**}$. 令 $f$ 在 $\mathfrak{R}_2^*$ 上变，并且令 $x_1$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 里确定的向量，則映照

$$f \to x_1(fA^*) \equiv (fA^*)(x_1) \in \Delta$$

是 $\mathfrak{R}_2^*$ 上一个綫性函数. 于是，存在着唯一决定的向量 $x_2 \in \mathfrak{R}_2$ 使对于所有 $f \in \mathfrak{R}_2^*$,

$$(fA^*)(x_1) = x_1(fA^*) = x_2(f) \equiv f(x_2) \tag{30}$$

成立. 故得 $x_1$ 映到 $x_2$ 的一个映照 $A^{**}$. 上面論証指出这个映照是綫性的；这也可以直接予以驗証.

今将証明：两个对应 $A \to A^*$ 及 $A^* \to A^{**}$ 是互逆的；亦即：如果 $A^*$ 是 $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 的折轉，則在 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 里 $A^*$ 的折轉是 $A$，并且如果 $A^{**}$ 是在 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 里 $A^* \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2^*, \mathfrak{R}_1^*)$ 的折轉，則 $A^{**}$ 的折轉是 $A^*$. 要証前者，我們由 $A^{**}$ 的定义知，$(fA^*)(x_1) = f(x_1A^{**})$. 于是，$f(x_1A) = f(x_1A^{**})$，而 $f(x_1A - x_1A^{**}) = 0$ 对于所有 $f$ 都成立. 但我們已知（参看 §10），由此可推得 $x_1A = x_1A^{**}$ 对于所有 $x_1$ 成立，故 $A = A^{**}$. 要証后者，可使用关系

$$(fA^*)(x_1) = f(x_1A^{**}) = (fA^{***})(x_1).$$

因为这对于所有 $x$ 都成立，所以 $fA^* = fA^{***}$，从而 $A^* = A^{***}$. 由此立知，映照 $A \to A^*$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 到 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2^*, \mathfrak{R}_1^*)$ 上的 1—1 映照.

在 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ 及 $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}^*, \mathfrak{R}^*)$ 这种特殊情形，映照 $A \to A^*$ 是这两个环間的一种反同构；这易由 1—1 性及方程(28)与(29)得出.

**12. 折轉的陣** 令 $A$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内的一个綫性变換，并令 $(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$, $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_2})$ 是这两个空間的基. 在空間 $\mathfrak{R}_1^*$, $\mathfrak{R}_2^*$ 里取余基 $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_{n_1}^*)$, $(f_1^*, f_2^*, \cdots, f_{n_2}^*)$，則

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}, \quad f_p^*(f_q) = \delta_{pq}.$$

今設 $(\alpha)$ 及 $(\beta)$ 順序是 $A$ 及它的折轉关于这些基的陣，則

$$e_i A = \sum_p \alpha_{ip} f_p, \quad f_q^* A^* = \sum e_j^* \beta_{jq}.$$

因为 $f_q^*(e_i A) = f_q^* A^*(e_i)$，所以

$$f_q^*\left(\sum_p \alpha_{ip} f_p\right) = \sum_j (e_j^* \beta_{jq})(e_i).$$

于是，$\alpha_{iq} = \beta_{iq}$，而 $(\alpha) = (\beta)$. 換句話說，如果在 $\mathfrak{R}_i$ $(i = 1, 2)$ 里及在 $\mathfrak{R}_i^*$ $(i = 1, 2)$ 里使用相余的基，則 $A$ 的陣与 $A$ 的折轉的陣相等.

这个結果或者有点突然. 它的說明基于左向量空間与右向量空間里綫性变換的陣的定义. 在 $\Delta = \Phi$ 是一个域的特殊情形下，这結果通常以某种不同形式出現. 本书考慮的空間慣例都是左向量空間，这可由以 $\alpha x$ 代 $x\alpha$ 来实現. 于是，上面导出的关系 $f_q^* A^* = \sum_j e_j^* \alpha_{jq}$ 可記为

$$f_q^* A^* = \sum_j e_j^* \alpha_{jq} = \sum_j \alpha_{jq} e_j^* = \sum_j \alpha'_{qj} e_j^*,$$

这里 $\alpha'_{qj} = \alpha_{jq}$. 所以，如果把 $\mathfrak{R}_i^*$ 作为左向量空間，則 $A^*$ 的陣是 $A$ 的陣 $(\alpha)$ 的折轉陣 $(\alpha)'$. 如果 $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$，則順序得綫性变換环 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ 与 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}^*, \mathfrak{R}^*)$ 到陣环 $\Phi_n$ 上的同构 $A \to (\alpha)$ 与 $A^* \to (\alpha)'$. 因为 $A \to A^*$ 是一个反同构，故知映照 $(\alpha) \to (\alpha)'$ 是 $\Phi_n$ 里一个反同构，亦即 $(\alpha) \to (\alpha)'$ 是 1—1 对应，并且

$$[(\alpha) + (\beta)]' = (\alpha)' + (\beta)', \quad [(\alpha)(\beta)]' = (\beta)'(\alpha)'.$$

这个当然也可以直接驗証的.

今回复到任意可除环这个一般情形，并且在一个綫性变換及它的折轉变換的秩空間与脑空間之間建立下面的关系.

**定理 11.** $A$ 的脑空間是与 $A$ 的折轉 $A^*$ 的秩空間關联的子空間. $A$ 的秩空間是与 $A^*$ 的脑空間關联的子空間.

証 我們只要証明定理的前半段就够了. 所以，令 $z$ 是使 $zA=0$ 的一个向量；于是，对于所有 $f$, $f(zA)=0$；从而 $(fA^*)(z)=0$. 故 $z \in j(\mathfrak{R}_2^* A^*)$. 逆定理的証明可从倒轉各个步驟而得.

至此可証

**定理 12.** $A$ 的秩等于 $A^*$ 的秩.

証 $A^*$ 的秩 $= \dim(\mathfrak{R}_2^* A^*) = \dim j(\mathfrak{N})$，这里 $\mathfrak{N}$ 是 $A$ 的胸空間. 还有 $\dim j(\mathfrak{N}) = n_1 - \dim \mathfrak{N}$，这里 $n_1 = \dim \mathfrak{R}_1 = \dim \mathfrak{R}_1^*$. 另一方面，有 $A$ 的秩 $= n_1 - \dim \mathfrak{N}$. 故 $A$ 的秩等于 $A^*$ 的秩.

如果 $(\alpha)$ 是任意陣，則 $(\alpha)$ 可用为綫性变换 $A$ 的陣，也可用为 $A$ 的折轉 $A^*$ 的陣. 由于我們已知 $A$ 的秩是 $(\alpha)$ 的行秩，而 $A^*$ 的秩是 $(\alpha)$ 的列秩. 故定理 12 給出任意陣的两种秩相等的定理以一个几何証明.

**13. 射影** 今来討論与一个向量空間对于子空間的直接分解有密切联系的一种綫性变换，作为本章的結束. 設 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_r$，亦即 $\mathfrak{R}$ 是子空間 $\mathfrak{R}_i$ 的直接和(参看第一章的 §11). 如果 $x$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意向量，則 $x$ 可写成

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r, \tag{31}$$

这里 $x_i \in \mathfrak{R}_i$. 我們还知道，对于一个給定的 $i$，$x$ 在 $\mathfrak{R}_i$ 里的分量 $x_i$ 是唯一的. 所以，把 $x$ 映到 $x_i$ 的映照 $E_i$ 是单值的. 今来考察这些映照的性質. 令 $y = y_1 + y_2 + \cdots + y_r$，$y_i \in \mathfrak{R}_i$，則

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_r + y_r),$$

这里 $x_i + y_i \in \mathfrak{R}_i$. 因此 $x + y$ 在 $\mathfrak{R}_i$ 里的分量是 $x_i + y_i$. 故得下面关于 $E_i$ 的条件：

$$(x + y)E_i = xE_i + yE_i.$$

又由(31)得

$$\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_r,$$

故 $\alpha x$ 在 $\mathfrak{R}_i$ 里的分量是 $\alpha x_i$. 换句話說，我們有关系

$$(\alpha x)E_i = \alpha(xE_i).$$

故知，$E_i$ 是 $\Delta$ 上向量空間 $\mathfrak{R}$ 里的一个綫性变换.

其次，考虑存在于 $E_i$ 間的关系. 首先是(31)可改写成

$$x = xE_1 + xE_2 + \cdots + xE_r. \tag{32}$$

故

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_r = 1. \tag{33}$$

如果 $x_i \in \mathfrak{R}_i$，则 $x = x_i$ 的表达式(31)化为 $x_i = x_i$。故 $x_i E_i = x_i$，而 $j \neq i$ 时 $x_i E_j = 0$。所以对于任意 $x$ 有 $xE_i = x_i \in \mathfrak{R}_i$。故知 $xE_i^2 = x_i E_i = x_i = xE_i$，而 $xE_i E_j = x_i E_j = 0$。于是，得下面的方程：

$$E_i^2 = E_i, \quad E_i E_j = 0 \quad (i \neq j). \tag{34}$$

同势的綫性变换 $E$，亦即 $E$ 等于它的平方 ($E^2 = E$)，通常叫做射影。如果射影的一个集合里任意两个不同的射影的积等于 0，则説这个集合是正交射影集合。如果正交射影 $E_1, E_2, \cdots, E_r$ 的和是恆等映照，则它們的集合叫做补集合。于是，上面关于由分解 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_r$ 所决定的映照 $E_i$ 的結果是：这些映照构成正交射影的一个补集合。今将証明：正交射影的每个有限补集合都是这样得到。譬如，令 $E_1, E_2, \cdots, E_r$ 是这样一个集合，令 $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}E_i$ 是 $E_i$ 的秩空間。如果 $x$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意向量，则

$$x = x1 = x(\sum E_i) = xE_1 + xE_2 + \cdots + xE_r$$
$$\in \mathfrak{R}E_1 + \mathfrak{R}E_2 + \cdots + \mathfrak{R}E_r.$$

故 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \cdots + \mathfrak{R}_r$。次令

$$z_i = z_1 + \cdots + z_{i-1} + z_{i+1} + \cdots + z_r, \tag{35}$$

这里 $z_j \in \mathfrak{R}_j$。因为 $z_i$ 的形状是 $y_i E_i$，$z_i E_i = y_i E_i^2 = y_i E_i = z_i$；仿此，如果 $j \neq i$，则 $z_j E_i = y_j E_j E_i = 0$。所以，如果我們在(35)的左端施行变换 $E_i$，则得 $z_i$，而在右端施行时则得 0；故 $z_i = 0$。这証明了

$$\mathfrak{R}_i \cap (\mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_{i-1} + \mathfrak{R}_{i+1} + \cdots + \mathfrak{R}_r) = 0$$
$$(i = 1, 2, \cdots, r).$$

故 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_r$。因为 $x = \sum xE_i$，而 $xE_i = x_i \in \mathfrak{R}_i$；于是，由这个分解所决定的射影是映照 $x \to xE_i$，亦即給定的綫性变换 $E_i$。所以，我們在向量空間的直接分解与正交射影的有限补集合之間建立了一个 1—1 对应。

其次，是求正交射影 $E_1, E_2, \cdots, E_r$ 的补集合的典型基。令 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_r$，则可得 $\mathfrak{R}$ 的一个基 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 使 $(f_1, \cdots, f_{\rho_1})$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 的一个基，$(f_{\rho_1+1}, \cdots, f_{\rho_1+\rho_2})$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 的一个基，…。于是，$\rho_i = E_i$ 的秩。因为 $j \neq i$ 时 $E_j E_i = 0$，故綫性变换 $E_i$ 除了

第 $i$ 个子集合 $(f_{\rho_1+\cdots+\rho_{i-1}+1}, \cdots, f_{\rho_1+\cdots+\rho_i})$外，把所有 $f$ 都零化了。因为 $E_i^2 = E_i$，故 $E_i$ 把 $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}E_i$ 里任意向量映到它自身内。于是，$E_i$ 关于基 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 的陣是对角陣

$$(36) \qquad (\delta_i) = \operatorname{diag}\{0, \cdots, 0, \overbrace{1, \cdots, 1}^{\rho_i}, 0, \cdots, 0\},$$

在这里除了第 $\rho_1 + \cdots + \rho_{i-1} + 1$ 到第 $\rho_1 + \cdots + \rho_i$ 各行外，余下的元素都是 0。

今摘去 $\sum E_i = 1$ 的假設，亦即設 $E_1, E_2, \cdots, E_r$ 是正交射影的任意有限集合。令 $E = \sum_{i=1}^{r} E_i$，而 $E_{r+1} = 1 - E$。因为在 $i, j \leqslant r$ 而 $i \neq j$ 时 $E_iE_j = 0$，故 $E^2 = \sum E_i^2 = \sum E_i = E$。又 $E_{r+1}^2 = (1 - E)^2 = 1-2E + E^2 = 1-2E + E = 1- E = E_{r+1}$。还有在 $j \leqslant r$ 时 $E_jE = E_j\sum E_i = E_j^2 = E_j$ 及 $EE_j = E_j$。故知 $E_jE_{r+1} = E_j(1 - E) = E_j - E_jE = E_j - E_j = 0$；同理也有 $E_{r+1}E_j = 0$。因此就証明了集合 $E_1, E_2, \cdots, E_{r+1}$ 是正交射影的补集合。上面討論指出：$\mathfrak{R}$ 里存在一个基 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 使 $E_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$关于这个基的陣的形状是(36)。

这些論述也适用于单一同势綫性变換。如果 $E_1$ 是属于这个类型，則 $E_1$ 及 $E_2 = 1 - E_1$ 是正交的及相补的。$E_1$ 关于适当的基的陣的形状是 $\operatorname{diag}\{1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0\}$；这里 1 的个数等于 $E_1$ 的秩。

## 習 題 20

1. 証明下面关于陣的定理：如果 $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), \cdots, (\varepsilon_r)$ 是陣的集合，使

$$(37) \qquad (\varepsilon_i)^2 = (\varepsilon_i),\ i \neq j \text{时}\ (\varepsilon_i)(\varepsilon_j) = 0,$$

則在 $L(\Delta, n)$ 里存在有陣 $(\mu)$ 使 $(\mu)(\varepsilon_i)(\mu)^{-1}$ 的形状是(36)。

2. 証明：两个射影 $E$ 及 $F$ 有相同的秩空間必須而且只須 $EF = E$ 及 $FE = F$；并証明：它們有相同的胭空間必須而且只須 $EF = F$，$FE = E$。

3. 証明：如果 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 是有相同秩空間的射影，而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是 $\Delta$ 的元素使 $\sum\alpha_i = 1$，則 $\sum\alpha_iE_i$ 是与 $E_i$ 有相同的秩空間的一个射影。

4. 設 $\Delta$ 的特征数 $\neq 2$（就是說：在 $\Delta$ 里，如果 $\alpha \neq 0$，則 $2\alpha = \alpha + \alpha \neq 0$），証明：如果 $E_1$ 与 $E_2$ 都是射影，它們的和也是一个射影，則 $E_1$ 与 $E_2$ 是正交射影。

5. 証明：如果 $E_1$ 与 $E_2$ 是可交换的射影，則 $E_1E_2$ 及 $E_1 + E_2 - E_1E_2$ 都是射影。

# 第 三 章

## 单独一个綫性变换的理論

本章专討論域上向量空間里的单綫性变换. 我們将获得向量空間关于一个給定的綫性变换分解为叫做循环子空間的分解法. 在这些空間里选取适当的基可得变换的某种典型陣. 这些結果提供陣的相似的充要条件. 我們照克魯尔(Krull)方法使用有限生成$\mathfrak{o}$-模导出基本的分解定理,这里$\mathfrak{o}$是一个主理想整环. 在本章里我們还証明关于陣的特征多項式及最低多項式的汉米頓(Hamilton)-凱萊(Cayley)定理及福路本紐斯(Frobenius)定理. 末了我們研究与一个給定变换可交换的綫性变换的代数.

**1. 綫性变换的最低多項式** 本章里假定用作基础的可除环是域, 并用$\Phi$表示这个域. 令$\mathfrak{R}$是$\Phi$上向量空間, 并且令$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$是$\mathfrak{R}$到它自身內的綫性变换的集合. 我們知道, $\mathfrak{L}$可看作$\Phi$上一个代数, 亦即: 1) $\mathfrak{L}$是一个环; 2) $\mathfrak{L}$是$\Phi$上一个向量空間,它的加法与环的加法相同; 3) 对于$A, B \in \mathfrak{L}$及$\gamma \in \Phi$,

$$\gamma(AB) = (\gamma A)B = A(\gamma B)$$

成立. 积$\gamma A$定义为积$\gamma_l A = A\gamma_l$. 我們还令$\mathfrak{L}$是$\Phi$上$n^2$維空間.

今令$A$是$\mathfrak{R}$里一个任意綫性变换, 并令$[1, A, A^2, \cdots]$是由$A$的冪生成的$\mathfrak{L}$的子空間. 如果$A$不是1的倍量,則$(1, A)$是綫性无关集合. 如果$A^2$与$(1, A)$不是綫性相关的,由于$(1, A)$是綫性无关集合,所以$(1, A, A^2)$也是如此. 这样継續下去, 得綫性无关集合$(1), (1, A), (1, A, A^2), (1, A, A^2, A^3), \cdots$.

因为$\mathfrak{L}$的維数有限,故經过有限个步驟后,这个方法必須終止进行. 在第一次达到$A$的冪$A^m$与前面各冪綫性相关时这种情况就出現. 于是$(1, A, A^2, \cdots, A^{m-1})$是綫性无关的, 而$A^m \in [1,$

$A, A^2, \cdots, A^{m-1}]$. 故得形状如

(1) $$A^m = \mu_0 1 + \mu_1 A + \cdots + \mu_{m-1} A^{m-1}$$

的一个关系,这里 $\mu_i \in \Phi$. 以 $A$ 乘(1),则借分配律及上面的代数条件 3) 得方程

$$A^{m+1} = \mu_0 A + \mu_1 A^2 + \cdots + \mu_{m-1} A^m.$$

因为 $A^m \in [1, A, A^2, \cdots, A^{m-1}]$,就可見 $A^{m+1} \in [1, A, A^2, \cdots, A^{m-1}]$. 同理可証: $A^{m+2}, A^{m+3}, \cdots$ 都属于 $[1, A, A^2, \cdots, A^{m-1}]$. 故

$$[1, A, A^2, \cdots] = [1, A, A^2, \cdots, A^{m-1}];$$

又因为右端上 $A^k$ 的集合是綫性无关的, 故知 $[1, A, A^2, \cdots]$ 有 $(1, A, A^2, \cdots, A^{m-1})$ 做它的基.

今探討关系(1)的一个重要解釋. 首先我們知道,映照

(2) $$\alpha \to \alpha 1 = \alpha_l$$

是 $\Phi$ 到 $\mathfrak{L}$ 內的一个同构;这因为

(3) $$(\alpha + \beta)1 = \alpha 1 + \beta 1,$$
$$(\alpha\beta)1 = (\alpha\beta)(1^2) = \alpha(\beta(1^2)) = \alpha(1(\beta 1)) = (\alpha 1)(\beta 1).$$

如果 $\alpha \neq 0$, 則 $\alpha 1 \neq 0$, 故这个映照是 1—1 的. 所以象集合 $\Phi 1$ 是与 $\Phi$ 同构的 $\mathfrak{L}$ 的一个子域.

今令 $\Phi[\lambda]$ 表示含有超越元素(不定量) $\lambda$ 而系数在 $\Phi$ 內的多項式整区. 綫性变换 $A$ 是与每个元素 $\alpha 1 (= \alpha_l)$ 可交換的. 故由此知映照

(4) $$f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots \to f(A) \equiv \alpha_0 1 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots$$

是 $\Phi[\lambda]$ 到 $\mathfrak{L}$ 內的一个同态. 这个同态是同构(2)的扩张,而它的特性是把 $\lambda$ 映到 $A$. 令 $\mathfrak{K}$ 是这个同态的核,亦即 $\mathfrak{K}$ 是使 $\nu(A) = 0$ 的多項式 $\nu(\lambda)$ 的理想. 我們知道, $\Phi[\lambda]$ 是一个主理想整区[1],就是說, $\Phi[\lambda]$ 里每个理想必是一个特殊多項式的倍式所构成. 特别是, $\mathfrak{K} = (\mu(\lambda))$ 是 $\mu(\lambda)$ 的倍式的集合; 如果取生成元素 $\mu(\lambda)$ 的首項系数为 1,則这生成元素是唯一决定的. 由关系(1)得

1) 例如参看本书第一卷的第三章, § 6.

$$A^m - \mu_{m-1}A^{m-1} - \mu_{m-2}A^{m-2} - \cdots - \mu_0 1 = 0.$$

故知非零多項式

$$\lambda^m - \mu_{m-1}\lambda^{m-1} - \mu_{m-2}\lambda^{m-2} - \cdots - \mu_0 \tag{5}$$

属于 $\mathfrak{K}$. 故由前此建立的結果指出 $\mathfrak{K} \neq 0$. 我們要注意到，由(1)所决定的多項式(5)是 $\mathfrak{K}$ 的生成元素 $\mu(\lambda)$；这因为，否則必有次数低于 $m$ 的多項式存在使 $A^r + \nu_{r-1}A^{r-1} + \cdots + \nu_0 = 0$，而与 $1, A, \cdots, A^r$ 是綫性无关的相矛盾.

这样的多項式 $\mu(\lambda)$ 叫做綫性变换 $A$ 的**最低多項式**；它的特性是：1)首項系数 $= 1$；2) $\mu(A) = 0$；3) 如果 $\nu(\lambda)$ 是使 $\nu(A) = 0$ 的任意多項式，則 $\nu(\lambda)$ 是 $\mu(\lambda)$ 的倍式.

$\mathfrak{L}$ 与陣环 $\Phi_n$ 之間的同构使我們能够把上面导出的結果轉移到陣上. 令 $(\alpha)$ 是 $A$ 关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣，則 $\beta_0 1 + \beta_1 A + \cdots + \beta_k A^k$ 关于这个基的陣是 $\beta_0 1 + \beta_1(\alpha) + \cdots + \beta_k(\alpha)^k$. 所以，如果由(5)給出的多項式 $\mu(\lambda)$ 是 $A$ 的最低多項式，則

$$\mu((\alpha)) \equiv (\alpha)^m - \mu_{m-1}(\alpha)^{m-1} - \cdots - \mu_0 1 = 0.$$

反过来，含有 $(\alpha)$ 的关系可推出 $A$ 的对应关系. 因此可知，$\mu(\lambda)$ 是有 $(\alpha)$ 为根的最低次多項式. 由于这个理由，我們也把 $\mu(\lambda)$ 叫做**陣 $(\alpha)$ 的最低多項式**.

### 習 題 21

1. 对于任意代数証明：法則：$(\alpha\beta)(xy) = (\alpha x)(\beta y)$.
2. 一个非零的同势綫性变换的最低多項式是什么？
3. 令 $\mathfrak{R}$ 是次数 $\leqslant n-1$，并且有实系数的多項式的向量空間，求微分算子 $D$ 的最低多項式，及使 $f(\lambda)A = f(\lambda+1)$ 的綫性变换 $A$ 的最低多項式.

**2. 循环子空間** 在綫性变换 $A$ 的研究中，关于 $A$ **不变**的子空間 $\mathfrak{S}$ 的发現是特饒兴趣的，这时 $A$ 把这些子空間映到它們自身內. 如果 $\mathfrak{S}$ 是这样一个子空間，則 $A$ 在 $\mathfrak{S}$ 里誘导出一个映照；显然这个映照是一个綫性变换.

不变子空間的最簡单类型是由单一向量生成的一个不变子空間. 令 $u$ 是 $\mathfrak{R}$ 里一个特別向量，并且令 $\mathfrak{S}$ 表示包含 $u$ 的最小不变子空間. 因为 $u \in \mathfrak{S}$，故 $uA \in \mathfrak{S}$；于是 $uA^2 = (uA)A$，$uA^3 =$

$(uA^2)A$, $\cdots$ 也 $\in \mathfrak{S}$;因此

$$[u, uA, uA^2, \cdots] \subseteq \mathfrak{S}.$$

另一方面,如果 $v$ 是空間 $[u, uA, \cdots]$ 里任意向量,則

$$v = \alpha_0 u + \alpha_1 uA + \cdots + \alpha_r uA^r$$
$$= uf(A),$$

这里 $f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_r\lambda^r$. 所以, $vA = uf(A)A \in [u, uA, \cdots]$. 因此,这个空間是不变的,并且 $[u, uA, uA^2, \cdots]$ 是 $\mathfrak{R}$ 里含有向量 $u$ 的最小不变子空間. 我們把 $[u, uA, \cdots]$ 記作 $\{u\}$,而叫这个空間做由向量 $u$ 生成的(关于 $A$ 的)**循环空間**.

今設 $u \neq 0$,并令 $uA^r (r \geqslant 1)$ 是序列 $u, uA, uA^2, \cdots$ 里最先与它的前面向量綫性相关的向量,則仿前此关于 $A$ 的冪的討論得

$$\{u\} = [u, uA, \cdots, uA^{r-1}], \tag{6}$$

而 $(u, uA, \cdots, uA^{r-1})$ 是这个空間的一个基. 我們还有如

$$uA^r = \nu_0 u + \nu_1 uA + \cdots + \nu_{r-1} uA^{r-1}$$

形状的关系,或者写成 $u\mu_u(A) = 0$,这里

$$\mu_u(\lambda) = \lambda^r - \nu_{r-1}\lambda^{r-1} - \cdots - \nu_0. \tag{7}$$

由 $r$ 的选法显見 $\mu_u(\lambda)$ 是具有性質 $u\mu_u(A) = 0$ 的最低次非零多項式. $\mu_u(\lambda)$ 叫做向量 $u$ 的**指导多項式**.

今就使 $u\nu(A) = 0$ 的多項式 $\nu(\lambda)$ 的全体 $\mathfrak{J}_u$ 来說,易知 $\mathfrak{J}_u$ 是 $\Phi[\lambda]$ 里一个理想. 正次数的多項式 $\mu_u(\lambda) \in \mathfrak{J}_u$,并且是这个理想里一个最低次非零多項式. 故 $\mathfrak{J}_u = (\mu_u(\lambda))$. 末了,我們看出:$\mu_u(\lambda)$ 是 $A$ 在 $\{u\}$ 里誘导出的綫性变換的最低多項式 $\bar{\mu}(\lambda)$;这因为,如果 $v$ 是 $\{u\}$ 里任意向量,則 $v = uf(A)$,故

$$v\mu_u(A) = uf(A)\mu_u(A) = u\mu_u(A)f(A) = 0f(A) = 0.$$

于是,在 $\{u\}$ 里 $\mu_u(A) = 0$;因此,$\bar{\mu}(\lambda) | \mu_u(\lambda)$. 另一方面有 $u\bar{\mu}(A) = 0$. 故 $\bar{\mu}(\lambda) \in \mathfrak{J}_u$,从而 $\mu_u(\lambda) | \bar{\mu}(\lambda)$. 由这两个关系推得 $\bar{\mu}(\lambda) = \mu_u(\lambda)$.

如果 $u = 0$,則 $\{u\} = 0$. 此时 $\mathfrak{J}_u = (1)$,我們就說:指导多項式是 1.

如果 $\mu(\lambda)$ 是 $A$ 的最低多項式,則 $\mu(A) = 0$,而 $u\mu(A) = 0$.

故 $A$ 的最低多項式是各个指导多项式 $\mu_u(\lambda)$ 的倍式.

**3. 用最低多項式为指导的向量的存在** 令 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是向量的一个集合,它們关于 $A$ 生成 $\mathfrak{R}$; 就是說, $\mathfrak{R}$ 里每个向量 $x$ 可由在 $\Phi[\lambda]$ 里取适宜的 $\phi_i(\lambda)$ 而表达为 $x = \sum_1^r e_i\phi_i(A)$ 的形状. 这样的有限集合是存在的; 这因为, 任意普通的基具有这个性質. 令 $\bar{\mu}(\lambda)$ 是指导多項式 $\mu_{e_i}(\lambda)$ 的最低公倍式 $[\mu_{e_1}(\lambda), \mu_{e_2}(\lambda), \cdots, \mu_{e_r}(\lambda)]$. 因为每个 $\mu_{e_i}(\lambda)$ 是 $A$ 的最低多项式 $\mu(\lambda)$ 的一个因子, 所以 $\bar{\mu}(\lambda)|\mu(\lambda)$. 另一方面, 如果 $x = \sum e_i\phi_i(A)$, 則

$$x\bar{\mu}(A) = \sum e_i\phi_i(A)\bar{\mu}(A) = \sum e_i\bar{\mu}(A)\phi_i(A) = 0.$$

于是, $\bar{\mu}(A) = 0$, 由此幷推得 $\mu(\lambda)|\bar{\mu}(\lambda)$. 故 $\mu(\lambda) = \bar{\mu}(\lambda)$. 所以 $A$ 的最低多項式是生成元素的任意集合的各指导多項式的最小公倍式. 这推广了在循环子空間情形所建立的結果.

今把 $\mu_{e_i}(\lambda)$ 用相同的素因子的积列出, 令

$$\mu_{e_i}(\lambda) = \pi_1(\lambda)^{k_{1i}}\pi_2(\lambda)^{k_{2i}}\cdots\pi_s(\lambda)^{k_{si}},$$

这里各个 $\pi_i$ 都不相同, 幷且 $k_{ji} \geqslant 0$. 我們还可設 $\pi_i$ 的首項系数都是 1. 如果 $k_j = \max(k_{j1}, k_{j2}, \cdots, k_{jr})$, 則多項式

$$\pi_1(\lambda)^{k_1}\pi_2(\lambda)^{k_2}\cdots\pi_s(\lambda)^{k_s} = \bar{\mu}(\lambda) = \mu(\lambda).$$

通常如果指导多項式 $\mu_x(\lambda) = \mu_1(\lambda)\mu_2(\lambda)$, 則 $y = x\mu_1(A)$ 的指导多項式是 $\mu_2(\lambda)$; 这可立即証明的. 应用这个結果可見: 如果 $k_1 = k_{1i_1}$, 則

$$f_1 = e_{i_1}\pi_2(\lambda)^{k_{2i_1}}\pi_3(\lambda)^{k_{3i_1}}\cdots\pi_s(\lambda)^{k_{si_1}}$$

的指导多項式是 $\pi_1(\lambda)^{k_1}$. 仿此, 可找指导多項式 $\pi_j(\lambda)^{k_j}$ 的一个向量 $f_j(j = 2, \cdots, s)$. 今将証明向量

$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_s$$

有指导多項式 $\mu_f(\lambda) = \mu(\lambda)$: 这可由下面更一般結果得出:

**引理** 如果 $f_i$ 的指導多項式 $\mu_i(\lambda)(i = 1, 2, \cdots, s)$ 是兩兩互素的, 則 $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_s$ 的指導多項式是積 $\nu(\lambda) = \prod\mu_i(\lambda)$.

**証** 因为对于每个 $i$, $f_i\mu_i(A) = 0$, 所以 $f\nu(A) = \sum f_i\nu(A) = 0$.

于是，$\mu_f(\lambda)\,|\,\nu(\lambda)$. 其次，我們知道：如果 $\rho_1(\lambda)=\mu_f(\lambda)\mu_2(\lambda)\mu_3(\lambda)\cdots\mu_s(\lambda)$，則 $f\rho_1(A)=0$，而 $f_j\rho_1(A)=0\ (j=2,3,\cdots,s)$. 所以，还有 $f_1\rho_1(A)=0$. 这就推得 $\mu_1(\lambda)\,|\,\rho_1(\lambda)$. 因为 $\mu_1(\lambda)$ 与 $\mu_2(\lambda),\cdots,\mu_s(\lambda)$ 互素，故 $\mu_1(\lambda)\,|\,\mu_f(\lambda)$. 同理，$\mu_2(\lambda)\,|\,\mu_f(\lambda)$，$\mu_3(\lambda)\,|\,\mu_f(\lambda)$，$\cdots$. 于是，$\nu(\lambda)=\Pi\mu_i(\lambda)$ 是 $\mu_f(\lambda)$ 的一个因子. 故 $\mu_f(\lambda)=\nu(\lambda)$. 証明就完成了.

上面討論給出下面的定理.

**定理 1.** $\mathfrak{R}$ 里存在一个向量，它的指導多項式是 $A$ 的最低多項式.

我們知道，任意向量 $u$ 的指导多項式的次数是空間 $\{u\}$ 的維数，所以 $\deg\mu_u(\lambda)\leqslant n$. 故得

**系** $A$ 的最低多項式的次數 $\leqslant n$.

### 習 題 22

1. 使用本节的方法証明：如果 $m$ 是有限交換羣 $G$ 的元素的最大阶数，則对于 $G$ 里所有 $x$ 都适合 $x^m=1$.

**4. 循环綫性变換** 如果存在有由单独一个向量 $e$ 生成空間 $\mathfrak{R}$，亦即 $\mathfrak{R}=\{e\}$，則 $\mathfrak{R}$ 叫做（关于 $A$ 的）循环空間，而 $A$ 叫做循环（有时叫做非貶抑）綫性变換. 我們知道，此时 $\mu(\lambda)=\mu_e(\lambda)$，并且这个事实指出：一个循环空間的任意两个生成元素的指导多項式都相同. 它还指出：循环綫性变換的最低多項式的次数为 $n$；这因为，如果 $\mathfrak{R}=\{e\}$，則 $\deg\mu_e(\lambda)=\dim\mathfrak{R}=n$. 所以，$\deg\mu(\lambda)=n$.

反过来，設 $A$ 是任意綫性变換，它的最低多項式的次数是 $n$，則由定理 1 知，有一个向量 $e$ 存在使 $\mu_e(\lambda)=\mu(\lambda)$. 于是，$\deg\mu_e(\lambda)=n$，而 $\dim\{e\}=n$. 当然这就是説 $\{e\}=\mathfrak{R}$. 故得下面的判断准則：

**定理 2.** 一个綫性變換是循环的必須而且只須它的最低多項式的次數是 $n$.

今設 $\mathfrak{R}=\{e\}$，并且令

$$\mu(\lambda)=\mu_e(\lambda)=\lambda^n-\mu_{n-1}\lambda^{n-1}-\cdots-\mu_0.$$

我們知道,向量 $(e, eA, \cdots, eA^{n-1})$ 构成一个基. 因为

$$
\begin{aligned}
eA &= eA \\
(eA)A &= eA^2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(eA^{n-2})A &= eA^{n-1} \\
(eA^{n-1})A &= \mu_0 e + \mu_1(eA) + \cdots + \mu_{n-1}(eA^{n-1}),
\end{aligned}
$$

故 $A$ 关于这个基的陣是

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
\mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n-2} & \mu_{n-1}
\end{pmatrix}. \tag{8}
$$

如果 $\mu(\lambda) = \lambda^n - \mu_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - \mu_0$ 是任意多項式,則(8)給出的 $n \times n$ 陣叫做 $\mu(\lambda)$ 的**友陣**. 照現在情形,如果 $A$ 是循环的,它的最低多項式是 $\mu(\lambda)$, 則(8)叫做 $A$ 的**約当典型陣**. 显然,最低多項式可由陣讀出.

今来导出显示 $\mu(\lambda)$ 的素因子的冪的典型陣. 我們先証

**定理 3.** 令 $\mathfrak{R} = \{e\}$, 并且 $\mu(\lambda) = \mu_1(\lambda) \cdots \mu_s(\lambda)$, 这里 $\mu_i(\lambda)$ 是兩兩互素的, 則 $\mathfrak{R} = \{e_1\} \oplus \{e_2\} \oplus \cdots \oplus \{e_s\}$, 这里 $\mu_{e_i}(\lambda) = \mu_i(\lambda)$.

令 $\nu_i(\lambda) = \mu(\lambda)(\mu_i(\lambda))^{-1}$, 并且令 $e_i = e\nu_i(A)$, 則 $\mu_{e_i}(\lambda) = \mu_i(\lambda)$. 我們还知道, $e' = e_1 + e_2 + \cdots + e_s$ 的指导多項式是 $\mu(\lambda)$. 所以, $\{e'\} = \mathfrak{R}$. 另一方面, $\{e'\} \subseteq \{e_1\} + \{e_2\} + \cdots + \{e_s\}$, 故 $\mathfrak{R} = \{e_1\} + \{e_2\} + \cdots + \{e_s\}$. 因为 $\dim \mathfrak{R} = \deg \mu(\lambda) = \sum \deg \mu_i(\lambda) = \sum \dim \{e_i\}$, 故子空間 $\{e_i\}$ 是无关的. 于是, $\mathfrak{R} = \{e_1\} \oplus \{e_2\} \oplus \cdots \oplus \{e_s\}$.

今令 $\mu(\lambda) = \pi_1(\lambda)^{k_1}\pi_2(\lambda)^{k_2} \cdots \pi_s(\lambda)^{k_s}$, 这里 $\pi_i$ 是不同的素因子,則由定理 3 得 $\mathfrak{R} = \{e_1\} \oplus \{e_2\} \oplus \cdots \oplus \{e_s\}$, 这里 $\mu_{e_i}(\lambda) = \pi_i(\lambda)^{k_i}$.

为使記法上簡单起見,暫时假定 $s = 1$. 于是, $\mu(\lambda) = \pi(\lambda)^k$,

这里 $\pi(\lambda)$ 是素因子，并且如果

$$\pi(\lambda)=\lambda^q-\rho_{q-1}\lambda^{q-1}-\cdots-\rho_0.$$

則 $n=\deg\mu(\lambda)=kq$. 引入向量

$$f_1=e\pi(A)^{k-1},\quad f_2=e\pi(A)^{k-1}A,\ \cdots,\ f_q=e\pi(A)^{k-1}A^{q-1};$$

$$f_{q+1}=e\pi(A)^{k-2},\ f_{q+2}=e\pi(A)^{k-2}A,\ \cdots,\ f_{2q}=e\pi(A)^{k-2}A^{q-1};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{(k-1)q+1}=e,\quad f_{(k-1)q+2}=eA,\ \cdots,\quad f_{kq}=eA^{q-1}.$$

于是，每个 $f$ 的形状是 $e\phi(A)$，这里 $\deg\phi(\lambda)<kq$. 再則与不同 $f$ 連帶的 $\phi(\lambda)$ 的次数都不相同. 如果 $\sum\delta_i f_i=0$，而 $\delta_i$ 不全为零，則必然存在次数 $<kq$ 的多項式 $\nu(\lambda)\neq 0$，而使 $e\nu(A)=0$，这与 $\deg\mu_e(\lambda)=\deg\mu(\lambda)=kq$ 的事实矛盾；因此各个 $f$ 是綫性无关的. 因为一共有 $kq$ 个 $f$；故 $(f_1, f_2, \cdots, f_{kq})$ 是 $\Phi$ 上 $\Re$ 的一个基.

$A$ 关于 $(f_1, f_2, \cdots, f_{kq})$ 的陣是什么呢？我們有下面的关系：

$$
\begin{aligned}
f_1A&=f_2\\
f_2A&=f_3\\
&\cdots\cdots,\\
f_{q-1}A&=f_q.\\
f_qA&=e\pi(A)^{k-1}A^q=e\pi(A)^{k-1}[A^q-\pi(A)]\\
&=e\pi(A)^{k-1}[\rho_0 1+\rho_1A+\cdots+\rho_{q-1}A^{q-1}]\\
&=\rho_0f_1+\rho_1f_2+\cdots+\rho_{q-1}f_q,\\
f_{q+1}A&=f_{q+2}\\
f_{q+2}A&=f_{q+3}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
f_{2q-1}A&=f_{2q}\\
f_{2q}A&=e\pi(A)^{k-2}A^q=e\pi(A)^{k-2}[A^q-\pi(A)]+e\pi(A)^{k-1}\\
&=\rho_0f_{q+1}+\rho_1f_{q+2}+\cdots+\rho_{q-1}f_{2q}+f_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{(k-1)q+1}A&=f_{(k-1)q+2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$f_{(k-1)q+q-1}A = f_{kq}$$

$$f_{kq}A = \rho_0 f_{(k-1)q+1} + \rho_1 f_{(k-1)q+2} + \cdots + \rho_{q-1} f_{kq} + f_{(k-2)q+1}.$$

故 $A$ 关于基 $(f_1, f_2, \cdots, f_{kq})$ 的陣的形状为

$$B = \begin{pmatrix} P & & & & \\ N & P & & & \\ & N & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & N & P \end{pmatrix}, \tag{9}$$

这里 $P$ 是 $\pi(\lambda)$ 的友陣,而 $N$ 是 $q \times q$ 陣

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

今回到一般情形, $\mu(\lambda) = \pi_1(\lambda)^{k_1} \pi_2(\lambda)^{k_2} \cdots \pi_s(\lambda)^{k_s}$ 及 $\mathfrak{R} = \{e_1\} \oplus \{e_2\} \oplus \cdots \oplus \{e_s\}$. 我們在每个 $\{e_i\}$ 里选取上面所指出的形状的基. 这些基合併起来就給出 $\mathfrak{R}$ 的一个基. $A$ 关于这个基的陣是

$$\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{bmatrix}, \tag{11}$$

这里每个 $B_i$ 是由 $\pi_i(\lambda)^{k_i}$ 决定的, 都与 $B$ 由 $\pi(\lambda)^k$ 决定的方法一样.

(11)叫做循环綫性变换 $A$ 的**古典典型陣**. 出現于最低多項式的因子分解里的素因子的冪 $\pi_i(\lambda)^{k_i}$ 叫做循环綫性变换的**初等因子**. 初等因子 $\pi_i(\lambda)^{k_i}$ 連带于古典典型陣里的陣块 $B_i$. 例如, 令 $\Phi$ 是有理数域, 并令 $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda^2 - 2)^2$, 則最低多項式为 $\mu(\lambda)$ 的循环綫性变换的古典典型陣是

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{|ccc|} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} & \\ & \begin{array}{|cc|cc|} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

## 習 題 23

1. 証明：如果 $\mu(\lambda)$ 是任意多项式，它的首项系数是 1，則有一个陣 $(\alpha)$ 存在，有 $\mu(\lambda)$ 作为它的最低多项式.

2. 証明：如果 $A$ 是一个綫性变换，它有对角陣

$$\operatorname{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\},$$

这里 $\alpha_i$ 全不相同，則 $A$ 的最低多项式是 $\Pi(\lambda-\alpha_i)$. 于是，証明 $A$ 是循环綫性变换.

3. 使用前題証明：如果 $C$ 是复数域，而 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ 是 1 的不同的 $n$ 次根，則

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 & & & \\ & \zeta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \zeta_n \end{bmatrix} \text{与} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在 $C_n$ 里是相似陣.

4. 証明：如果 $A$ 是一个綫性变换，它的陣是

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1n} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{24} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

則 $A$ 是循环的. 使用这个結果証明給定的陣相似于陣

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. 如果循环綫性变换的最低多项式是 $(\lambda-1)^3(\lambda^2+1)^2(\lambda+1)^2$，并假定 $\Phi$ 是实数域，則这个变换的古典典型陣是什么?

6. 証明：如果 $\Re=\{e_1\}\oplus\{e_2\}\oplus\cdots\oplus\{e_s\}$，而指导多项式 $\mu_{e_i}(\lambda)$ 是两两互素的，則 $\Re$ 是循环空間.

**5. 由綫性变换决定的 $\Phi[\lambda]$-模**　为着进一步研討綫性变换，我們要用到另一个观念，即使用 $\Phi[\lambda]$ 与环 $\mathfrak{A}=[1, A, A^2, \cdots]$ 之間的同态把向量空間 $\mathfrak{R}$ 轉化为一个 $\Phi[\lambda]$-模. 为达到这个目的，定义积 $\phi(\lambda)x (x\in\mathfrak{R})$ 为向量 $x\phi(A)$. 于是，

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)(x+y) &= (x+y)\phi(A) = x\phi(A) + y\phi(A)\\ &= \phi(\lambda)x + \phi(\lambda)y.\end{aligned}$$

又因为与 $\phi(\lambda)+\psi(\lambda)$ 及 $\phi(\lambda)\psi(\lambda)$ 对应的綫性变换各是 $\phi(A)+\psi(A)$ 及 $\phi(A)\psi(A)=\psi(A)\phi(A)$，故

$$\begin{aligned}[\phi(\lambda)+\psi(\lambda)]x &= x[\phi(A)+\psi(A)]\\ &= x\phi(A) + x\psi(A) = \phi(\lambda)x + \psi(\lambda)x,\\ [\phi(\lambda)\psi(\lambda)]x &= x[\psi(A)\phi(A)]\\ &= (x\psi(A))\phi(A) = \phi(\lambda)(\psi(\lambda)x),\\ 1x &= x1 = x.\end{aligned}$$

故适合基础模条件[1]. 采用模的观点有若干好处. 第一，我們以环 $\Phi[\lambda]$ 代替环 $\mathfrak{A}$. 环 $\mathfrak{A}$ 可能有很复杂的代数結构；它可含有无势元素，并且可以有零因子；但我們知道多項式环 $\Phi[\lambda]$ 是一个整区，并且有可以利用的这个环的算术理論. 关于 $\Phi[\lambda]$ 的基本算术性質是：这个环里的每个理想是一个主理想.

采用模的观点的第二个好处是引导我們去考虑比 $\mathfrak{R}$ 有更簡单的結构并且可用以研究 $\mathfrak{R}$ 的其它 $\Phi[\lambda]$-模. 事实上，我們要把 $\mathfrak{R}$ 的研究化为自由模与自由模的子模的研究. 这是按下面方法进行的：令 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\Phi$ 上 $\mathfrak{R}$ 的一个基. 自然 $e_i$ 成为 $\mathfrak{R}$ 关于 $\Phi[\lambda]$ 的生成元素的一个集合. 因为对于任意 $e\in\mathfrak{R}$ 有使 $\mu_e(\lambda)e = e\mu_e(A) = 0$ 的非零多项式 $\mu_e(\lambda)$ 存在，故 $\Phi[\lambda]$-模 $\mathfrak{R}$ 不是自由模. 故有如 $\sum_1^n \gamma_i(\lambda)e_i = 0$ 形状的若干关系存在，这里 $\gamma_i(\lambda)$ 不全为 0. 要研究这些关系，很自然地引入自由 $\Phi[\lambda]$-模

---

1) 应該指出，$\mathfrak{A}$ 里乘法的交換性是用于驗証第三公理的. 我們也可把 $\mathfrak{R}$ 看作右 $\Phi[\lambda]$-模. 此时 $x\phi(\lambda) = x\phi(A)$. 这大約是最自然的看法. 但我們采用上面方法是为着使与前此对于左模的強調相适应.

$\mathfrak{I}$,令它的基为 $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$. 如果 $v = \sum\phi_i(\lambda)t_i$ 是 $\mathfrak{I}$ 的一个元素，则可把 $v$ 与 $\mathfrak{R}$ 里元素 $vT = \sum\phi_i(\lambda)e_i$ 連系起来. 这个对应是 $\mathfrak{I}$ 到 $\mathfrak{R}$ 上的一个 $\Phi[\lambda]$-同态. 令 $\mathfrak{N}$ 表示这个同态的核；易知 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{I}$ 的一个子模. 由定义知，$\sum\gamma_i(\lambda)t_i \in \mathfrak{N}$ 必須而且只須关系 $\sum\gamma_i(\lambda)e_i = 0$ 在生成元素 $e_i$ 間成立. 故就某意义来說，$\mathfrak{N}$ 与 $e_i$ 間所获得的关系的集合成对应.

子模 $\mathfrak{N}$ 是容易决定的. 令 $e_iA = \sum\alpha_{ij}e_j$,则 $(\alpha)$ 是 $A$ 关于給定基的陣。 显然,元素

$$(12)\qquad \begin{aligned} v_1 &= (\lambda - \alpha_{11})t_1 - \alpha_{12}t_2 - \cdots - \alpha_{1n}t_n \\ v_2 &= -\alpha_{21}t_1 + (\lambda - \alpha_{22})t_2 - \cdots - \alpha_{2n}t_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= -\alpha_{n1}t_1 - \alpha_{n2}t_2 - \cdots + (\lambda - \alpha_{nn})t_n \end{aligned}$$

都属于 $\mathfrak{N}$. 今将証明：$\mathfrak{N}$ 是自由模，而 $v_i$ 成为这个模的一个基. 由規定 $v_i = \lambda t_i - \sum\alpha_{ij}t_j$ 得 $\lambda t_i = v_i + \sum\alpha_{ij}t_j$. 用这些关系可使元素 $v = \sum\phi_i(\lambda)t_i$ 表达为 $\sum\psi_i(\lambda)v_i + \sum\rho_i t_i$ 的形状,这里 $\rho_i \in \Phi$. 显然,如果 $v \in \mathfrak{N}$,則 $\sum\rho_i t_i \in \mathfrak{N}$. 于是，$\sum\rho_i e_i = (\sum\rho_i t_i)T = 0$. 但 $e_i$ 是 $\Phi$-无关的，由此推知每个 $\rho_i = 0$. 故 $v = \sum\psi_i(\lambda)v_i$，这証明 $v_i$ 是 $\mathfrak{N}$ 的生成元素. 次設 $\sum\psi_i(\lambda)v_i = 0$,則

$$\sum\psi_i(\lambda)\lambda t_i = \sum\psi_i(\lambda)\alpha_{ij}t_j$$

及

$$\psi_i(\lambda)\lambda = \sum_j \psi_j(\lambda)\alpha_{ji}.$$

如果有某 $\psi_i \neq 0$，令 $\psi_r$ 是一个有最大次数的，則关系 $\psi_r(\lambda)\lambda = \sum_j \psi_j(\lambda)\alpha_{jr}$ 显然是不可能. 这証明 $v_i$ 成为 $\mathfrak{N}$ 的一个基.

**6. 有限生成的 $\mathfrak{o}$-模，这里 $\mathfrak{o}$ 是一个主理想整区** 用模理論的方法还有另一个好处,它容易推广. 我們可考察任意主理想整区 $\mathfrak{o}$ 以代替 $\Phi[\lambda]$，并考察任意有限生成的 $\mathfrak{o}$-模 $\mathfrak{R}$[1]. 只要稍为增加困难就可按这个方法得出其它重要的应用；其中最值得注意的是

1) 我們要討論的許多事情也可对于 $\mathfrak{o}$-模来做，这里 $\mathfrak{o}$ 是非交换主理想整区. 这个理論可应用于可除环上一个向量空間里的单一綫性变换論. 参看著者的 Theory of Rings (1943 年出版于紐約)的第三章.

普通有限生成的交换羣理論：我們在第一章里詳过，这个理論可由把交换羣看作 $\mathfrak{o}$-模而得，这里 $\mathfrak{o}$ 是有理整数环.

故令 $\mathfrak{N}$ 是任意有限生成的 $\mathfrak{o}$-模，并且令 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是生成元素的集合. 依上面用过的方法我們引入自由模 $\mathfrak{F}$ 以 $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 为基，及映照 $T: \sum\phi_i t_i \to \sum\phi_i e_i$. 映照 $T$ 是一个 $\mathfrak{o}$-同态；故核 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{F}$ 的一个子模. 今将証明：自由 $\mathfrak{o}$-模的任意子模是自由模，这里 $\mathfrak{o}$ 是主理想整区. 我們規定模 0 是带有一个空基的一个自由模，这样在使用时感到方便.

今令 $\mathfrak{N}$ 是带有基 $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 的自由模 $\mathfrak{F}$ 的任意子模. 我們将对于 $n$ 施归納法，証明：$\mathfrak{N}$ 是自由模，且有 $m \leqslant n$ 个元素的一个基. 如果 $n = 0$，这定理是显然成立的. 于是，設它对于有 $n-1$ 个元素为基的模 $\mathfrak{F}'$ 成立，而考虑使 $\beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \cdots + \beta_n t_n \in \mathfrak{N}$ 的 $\mathfrak{o}$ 里元素 $\beta_1$ 的全体 $\mathfrak{I}$. 易知 $\mathfrak{I}$ 是一个理想；故 $\mathfrak{I} = (\delta_1)$. 如果 $\delta_1 = 0$，则 $\mathfrak{N}$ 的每个元素的形状如 $\beta_2 t_2 + \cdots + \beta_n t_n$，因此属于带有基 $(t_2, t_3, \cdots, t_n)$ 的自由模 $\mathfrak{F}'$ 里. 此时結果也显然成立. 故設 $\delta_1 \neq 0$，并令 $v_1 = \delta_1 t_1 + \sum_2^n \beta_j' t_j$ 是 $\mathfrak{N}$ 的一个元素有"首項系数"$\delta_1$. 于是，如果 $v$ 是 $\mathfrak{N}$ 的任意元素，则 $v = \sum\beta_i t_i$ 而 $\beta_1 = \mu_1\delta_1$. 所以，$v' = v - \mu_1 v_1 \in \mathfrak{F}'$. 这个元素当然也属于 $\mathfrak{N}$. 因为交 $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}'$ 是 $\mathfrak{F}'$ 的一个子模，故可設它是带有基 $v_2, v_3, \cdots, v_m$ $(m \leqslant n)$ 的一个自由模. 于是，$v' = \sum_{k=2}^m \mu_k v_k$ 而 $v = \mu_1 v_1 + \sum \mu_k v_k$. 故 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 是 $\mathfrak{N}$ 的生成元素的一个集合. 次設 $\sum_1^m \rho_i v_i = 0$；如果以 $\delta_1 t_1 + \sum\beta_j' t_j$ 代替 $v_1$，而其它的 $v$ 用 $t_2, t_3, \cdots, t_n$ 的表达式来代替，则得

$$\rho_1\delta_1 t_1 + \rho_2' t_2 + \cdots + \rho_m' t_m = 0.$$

因为 $\delta_1 \neq 0$，由此可推得 $\rho_1 = 0$. 于是，得 $\sum_2^n \rho_k v_k = 0$；因为 $(v_2, v_3, \cdots, v_m)$ 构成 $\mathfrak{N}'$ 的一个基，故由这个等式知所有 $\rho$ 都等于 0. 这就完成了下面定理的証明：

**定理 4.** 如果 $\mathfrak{T}$ 是带有 $n$ 个元素的基的一个自由 $\mathfrak{o}$-模，而 $\mathfrak{o}$ 是一个主理想整區，则 $\mathfrak{T}$ 的任意子模是自由模，且含有 $m \leqslant n$ 个元素的一个基.

**7. $\mathfrak{T}$ 及 $\mathfrak{N}$ 的生成元素的正規化** 今設元素 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 是自由 $\mathfrak{o}$-模 $\mathfrak{T}$ 的子模 $\mathfrak{N}$ 的生成元素，而 $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是 $\mathfrak{T}$ 的一个基. 令

$$
(13) \qquad \begin{aligned}
v_1 &= \sigma_{11}t_1 + \sigma_{12}t_2 + \cdots + \sigma_{1n}t_n, \\
v_2 &= \sigma_{21}t_1 + \sigma_{22}t_2 + \cdots + \sigma_{2n}t_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_m &= \sigma_{m1}t_1 + \sigma_{m2}t_2 + \cdots + \sigma_{mn}t_n.
\end{aligned}
$$

则陣 $(\sigma)$ (元素 $\sigma_{ij} \in \mathfrak{o}$) 由有序集合 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 及 $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 唯一决定.

令 $(\mu_{ij})$ 是陣环里一个单位，并令 $(\mu^*_{ij})$ 是它的逆陣. 定义 $t'_i = \sum \mu_{ij}t_j$，則可断言 $t'_i$ 构成 $\mathfrak{T}$ 的另一个基. 这因为，首先有关系

$$\sum \mu^*_{ki}t'_i = \sum_{i,j} \mu^*_{ki}\mu_{ij}t_j = \sum \delta_{kj}t_j = t_k.$$

所以，任意元素 $\sum \phi_i t_i$ 可写成形状 $\sum \psi_i t'_i$，而 $t'_i$ 是生成元素. 次設 $\sum \gamma_i t'_i = 0$，則 $\sum_{i,j} \gamma_i \mu_{ij} t_j = 0$. 于是，$\sum_i \gamma_i \mu_{ij} = 0$. 但这可推出

$$\gamma_k = \sum_{i,j} \gamma_i \mu_{ij} \mu^*_{jk} = 0,$$

这就証明了 $t'_i$ 构成一个基.

仿此可知，如果 $(\nu_{pq})$ 是 $\mathfrak{o}_m$ 里一个单位，则元素 $v'_p = \sum \nu_{pq} v_q$ 組成 $\mathfrak{N}$ 的生成元素的另一个集合.

今設以 $(t'_1, t'_2, \cdots, t'_n)$ 代替基 $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，这里 $t'_i = \sum \mu_{ij} t_j$，而 $(\mu)$ 是一个单位陣，又設以 $(v'_1, v'_2, \cdots, v'_m)$ 代替 $\mathfrak{N}$ 的生成元素 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$，这里 $v'_p = \sum \nu_{pq} v_q$. 則 $(v'_1, v'_2, \cdots, v'_m)$ 关于 $(t'_1, t'_2, \cdots, t'_n)$ 的陣是什么呢? 我們有关系

$$v'_p = \sum_q \nu_{pq} v_q = \sum_{q,i} \nu_{pq} \sigma_{qi} t_i = \sum_{q,i,j} \nu_{pq} \sigma_{qi} \mu^*_{ij} t'_j = \sum \tau_{pj} t'_j,$$

这里 $\tau_{pj} = \sum_{q,i} v_{pq}\sigma_{qi}\mu^*_{ij}$,故新陣与 $(\sigma)$ 的关系是

$$(\tau) = (\nu)(\sigma)(\mu)^{-1}. \tag{14}$$

因此問題归到"正确"选择单位陣 $(\nu)$ 及 $(\mu)^{-1}$ 使陣 $(\tau)$ 具有簡单的"典型"形状.

**8. 元素属于主理想整区的陣的等价** 令 $(\sigma)$ 及 $(\tau)$ 是元素属于主理想整区 $\mathfrak{o}$ 的两个 $m \times n$ 陣. 如果有一个单位 $(\mu) \in \mathfrak{o}_n$ 及一个单位 $(\nu) \in \mathfrak{o}_m$ 存在使

$$(\tau) = (\nu)(\sigma)(\mu),$$

則說 $(\sigma)$ 及 $(\tau)$ 是等价的. 这种关系是等价关系. 在 $\mathfrak{o}$ 是一个域的特殊情形前此已考虑了. 在那里我們知道, $(\sigma)$ 与 $(\tau)$ 是等价的充要条件是它們有相同的行列式秩. 对于任意主理想整区这个一般情形, 这个結果的推論是: 等价的必要条件是秩相等. 这因为, 令 $(\tau) = (\nu)(\sigma)(\mu)$, 这里 $(\mu)$ 及 $(\nu)$ 是单位. 于是, 如果 $P$ 是 $\mathfrak{o}$ 的商域, 則給定的方程可看作元素在 $P$ 里的陣之間的关系. 显然 $(\mu) \in L(P, n)$ 而 $(\nu) \in L(P, m)$. 故由域情形中所得結果知, $(\tau)$ 与 $(\sigma)$ 有相同的行列式秩.

今討論在与一个給定的 $m \times n$ 陣 $(\sigma)$ 等价的陣中选取具有特别簡单形状的陣的問題. 我們要得的結果是

**定理 5.** 如果 $(\sigma)$ 是元素属于一个主理想整區 $\mathfrak{o}$ 的 $m \times n$ 陣, 則存在有与 $(\sigma)$ 等价的一个"对角"陣[1]

$$\operatorname{diag}\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r, 0, \cdots, 0\},$$

这里 $\delta_i \neq 0$, 而在 $i < j$ 時 $\delta_i | \delta_j$ (亦即 $\delta_i$ 是 $\delta_j$ 的一个因子).

(a) 我們先給这个定理以一个构造性的証明, 这証明在 $\mathfrak{o}$ 是欧几里得整区的情形有效. 如果对于一个可交換整区里每个元素 $a$ 能定义一个度数 $\delta(a)$, 它是非負整数, 并且

1. $\delta(a) = 0$ 必須而且只須 $a = 0$;

2. $\delta(ab) = \delta(a)\delta(b)$;

3. 如果 $a$ 是任意元素而 $b \neq 0$, 則有元素 $q$ 及 $r$ 存在, $\delta(r) <$

---

1) 参看第二章, §6 的(18).

$\delta(b)$，使 $a = bq + r$.

则这个整区叫做欧几里得整区．关于欧几里得整区里任意理想是主理想的証明已見于本书第一卷的第四章 §5 里，不再贅述．今来証本定理．

首先我們要講到下列三种方陣都是单位陣：

$$T_{ij}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & \overset{j}{\vdots} & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots \beta & \cdots & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} i, \quad (i \neq j)$$

$$D_i(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & & \overset{i}{\vdots} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & & \\ & & \gamma & \cdots & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} i \text{（}\gamma\text{ 是 o 里一个单位）}$$

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \overset{i}{\vdots} & & \overset{j}{\vdots} & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & \vdots & & 1 \ \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \end{matrix} \quad (i \neq j)$$

这因为，$T_{ij}(\beta)^{-1} = T_{ij}(-\beta)$，$D_i(\gamma)^{-1} = D_i(\gamma^{-1})$ 及 $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$．我們容易驗証：

I. 以 $m \times m$ 陣 $T_{ij}(\beta)$ 左乘 $(\sigma)$ 得一个陣，它的第 $i$ 行是 $\beta$ 倍 $(\sigma)$ 的第 $j$ 行与 $(\sigma)$ 的第 $i$ 行之和，而它的其它各行与 $(\sigma)$ 相同．

以 $n \times n$ 陣 $T_{ij}(\beta)$ 右乘 $(\sigma)$ 得一个陣，它的第 $j$ 列是 $\beta$ 倍

$(\sigma)$的第 $i$ 列与 $(\sigma)$ 的第 $j$ 列之和，而它的其它各列与$(\sigma)$ 相同.

II. 以 $m \times m$ 陣 $D_i(\gamma)$ 左乘 $(\sigma)$ 等于作出以 $\gamma$ 乘 $(\sigma)$ 的第 $i$ 行的运算，而保留其它各行不变.

以 $n \times n$ 陣 $D_i(\gamma)$ 右乘 $(\sigma)$ 等于作出以 $\gamma$ 乘 $(\sigma)$ 的第 $i$ 列的运算，而保留其它各列不变.

III. 以 $m \times m$ 陣 $P_{ij}$ 左乘 $(\sigma)$ 等于把 $(\sigma)$ 的第 $i$ 行与第 $j$ 行对調，而保留其它各行不变.

以 $n \times n$ 陣 $P_{ij}$ 右乘 $(\sigma)$ 等于把 $(\sigma)$ 的第 $i$ 列与第 $j$ 列对調，而保留其它各列不变.

陣 $T_{ij}$, $D_i$, $P_{ij}$ 叫做**初等陣**，而用这些陣作乘法順序叫做第 I, II 及 III 型的**初等变換**. 由 $(\sigma)$ 經过有限次初等变換而得的陣与 $(\sigma)$是等价的. 現在叙述証明的主要部分.

如果 $(\sigma) = 0$ 就无須証明了. 否則令 $\sigma_{ij}$ 是 $(\sigma)$ 里最低度数的非零元素. 由第 III 型初等变換可把这个元素移到 $(1,1)$-位置. 如果 $\sigma_{1k} = \sigma_{11}\beta_k + \rho_{1k}$, 这里度数 $\delta(\rho_{1k}) < \delta(\sigma_{11})$, 則可使用第 I 型初等变換以 $\rho_{1k}$ 来代替 $\sigma_{1k}$. 如果 $\rho_{1k} \neq 0$, 則得与 $(\sigma)$ 等价的一个新陣，在这个陣里存在有非零元素，它的度数比 $(\sigma)$ 里最小非零的度数还小. 然后再对这个新陣重复使用上面的方法. 仿此，如果 $\sigma_{k1} = \sigma_{11}\beta'_k + \rho_{k1}$, 这里 $\delta(\rho_{k1}) < \delta(\sigma_{11})$, 則或是 $\rho_{k1} = 0$, 或是能得出与 $(\sigma)$ 等价的陣，它有一个非零元素，度数比最小的 $\delta(\sigma_{ij}) \neq 0$ 还小. 因为非零的最小度数是保持縮小，故最后到达一个陣，使 $\sigma_{1k} = \sigma_{11}\beta_k$, $\sigma_{k1} = \sigma_{11}\beta'_k (k = 1, 2, \cdots, n)$. 于是，由第 I 型初等变換給出下面形状的一个等价陣：

$$
(15) \qquad \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \rho_{m2} & \cdots & \rho_{mn} \end{bmatrix}, \quad \rho_{11} = \sigma_{11}.
$$

今把这个方法使用于子陣 $(\rho_{ij})$ $(i = 2, \cdots, m; j = 2, \cdots, n)$. 此时需要作的变換并不影响到第一行或第一列，而可得出下面形状的等价陣

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} & \cdots & \tau_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \tau_{m3} & \cdots & \tau_{mn} \end{bmatrix}.$$

这样継續下去，最后得出对角形状的一个等价陣，譬如为 diag $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, 0, \cdots, 0\}$，这里 $\varepsilon_i \neq 0$.

如果 $\varepsilon_i = \varepsilon_1\beta + \rho_i$, $\delta(\rho_i) < \delta(\varepsilon_1)$ 并且 $\rho_i \neq 0$，则可以等价陣

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_i & \cdots & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & \varepsilon_i & & \\ & & & \varepsilon_{i+1} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

代替前面的对角陣；这个陣与 $(1, i)$-位置上的元素是 $\rho_i$ 的陣等价. 我們再重复上面的方法把这个新陣"对角陣化"，而得另一个新陣 diag $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r, 0, \cdots, 0\}$，此时 $\delta(\eta_1) < \delta(\varepsilon_1)$. 这个方法重复使用若干次后，最終达到一个等价的对角陣 diag $\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r, 0, \cdots, 0\}$，这里非零元素 $\delta_i$ 适合所需要的可除条件.

(b)在一般情形的論証与此相似. 不过我們使用元素的长度来代替上面的度数. 一个元素分解为素因子 $\pi_1\pi_2\cdots\pi_r$ 时，素因子的个数叫做这个元素的长度. 由于 $\mathfrak{o}$ 里唯一分解因子定理[1]的成立，所以因子个数是不变数. 設 $\sigma_{11}$ 在非零元素中有最小长度，并設 $\sigma_{11} \nmid \sigma_{1k}$[2]. 記 $\alpha = \sigma_{11}$, $\beta = \sigma_{1k}$，并且令 $\delta$ 是 $\alpha$ 与 $\beta$ 的一个最高公因子，则有元素 $\xi, \eta$ 存在使 $\alpha\xi + \beta\eta = \delta$. 令 $\zeta = \beta\delta^{-1}$, $\theta = -\alpha\delta^{-1}$，則有陣关系式

$$\begin{bmatrix} -\theta & \zeta \\ \eta & -\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi & \zeta \\ \eta & \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

故这些陣是单位陣. 于是，

---

1) 参看本书第一卷，第四章 § 4.

2) $a \nmid b$ 的意思为：$a$ 不是 $b$ 的一个因子.

$$U=\begin{pmatrix} \xi & 0 & \cdots & 0 & \overset{k}{\zeta} & 0 & \cdots & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \eta & 0 & \cdots & 0 & \theta & \cdot & \cdots & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & \cdot & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} k$$

是一个单位陣. 陣 $(\sigma)U$ 以向量 $(\delta, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \cdots, \sigma_{1(k-1)}, 0, \sigma_{1(k+1)}, \cdots, \sigma_{1n})$ 做它的第一行. 因为 $\alpha \nmid \beta$, 故 $\delta$ 的长度小于 $\alpha=\sigma_{11}$ 的长度. 这个方法及施于第一列上的类似方法最后引出与 $(\sigma)$ 等价的一个陣, 在这个陣里 $\sigma_{11}$ 是每个 $\sigma_{1k}$ 及每个 $\sigma_{k1}$ 的一个因子. 这样就达到形状如(15)的一个陣. 余下的論証是重复上面的論証,就不多贅了.

与 $(\sigma)$ 等价而又具有定理 5 給出的形状的陣叫做陣 $(\sigma)$ 的**范式**. 范式的对角元素叫做 $(\sigma)$ 的**不变因子**. 我們将在 §10 里証明:不变因子事实上是給定的陣的不变量.

## 習 題 24

1. 求下面的陣的范式:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 5 \end{bmatrix},$$

此时 o 取整数环 $I$.

2. 求下面的陣的范式:

$$(\sigma)=\begin{bmatrix} \lambda-17 & 8 & 12 & -14 \\ -46 & \lambda+22 & 35 & -41 \\ 2 & -1 & \lambda-4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & \lambda-3 \end{bmatrix},$$

此时 $o=R_0[\lambda]$,而 $R_0$ 是有理数域;并求单位陣 $(\mu)$ 及 $(\nu)$ 使 $(\nu)(\sigma)(\mu)$ 为范式.

3. 証明:一个对角方陣 diag $\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$ 是一个单位陣必須而且只須每个 $\delta_i$ 是一个单位.

4. 应用第 3 題証明:如果 o 是欧几里得整区,则 $o_n$ 里任意单位陣是初等陣的积.

5. 証明：如果 $d$ 是元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公因子，則 $\mathfrak{o}_n$ 里有一个单位陣存在使 $(a_1, \cdots, a_n)(\mu) = (d, 0, \cdots, 0)$.

6. 証明：如果元素 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$ 是互素的（亦即最大公因子等于 1），則有元素 $a_{ij}(i = 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ 存在使 $(a)$ 是一个单位陣.

**9. 有限生成的 $\mathfrak{o}$-模的結构**　要叙述結构定理須引入关于 $\mathfrak{o}$-模的某些一般概念；其中有些概念已在由綫性变換决定的模的特殊情形里遇到.

令 $x$ 是 $\mathfrak{o}$-模 $\mathfrak{R}$ 的任意元素，則使 $\beta x = 0$ 的元素 $\beta \in \mathfrak{o}$ 的集合 $\mathfrak{I}_x$ 是一个理想. 这个理想叫做元素 $x$ 的阶理想. 如果 $\mathfrak{o}$ 是一个主理想整区，則 $\mathfrak{I}_x = (\mu_x)$. 再則，如果 $\mathfrak{o} = \Phi[\lambda]$ 及 $\mathfrak{I}_x \neq (0)$，則可把 $\mu_x$ 正規化使首項系数为 1. 这样得出的 $\mu_x$ 是上面講过的指导多項式.

$\mathfrak{R}$ 里固定元素 $x$ 的倍数 $\alpha x$ 的全体 $\{x\}$ 是一个子模. 我們叫 $\{x\}$ 做由 $x$ 生成的循环子模；并且如果 $\mathfrak{R}$ 里存在有一个 $e$ 使 $\mathfrak{R} = \{e\}$，則 $\mathfrak{R}$ 叫做循环模. 如果 $\mathfrak{I}_x = (0)$，則子模 $\{x\}$ 是一个自由模. 在相反情形，如果 $\mathfrak{I}_x \neq (0)$，則說 $x$ 是有有限阶.

如果 $y = \alpha x$，并且 $\beta \in \mathfrak{I}_x$，則 $\beta y = \beta\alpha x = \alpha\beta x = 0$. 所以 $\beta \in \mathfrak{I}_y$，从而 $\mathfrak{I}_x \subseteq \mathfrak{I}_y$. 如果 $y$ 是 $\{x\}$ 的另一个生成元素，則也有 $\mathfrak{I}_y \subseteq \mathfrak{I}_x$. 于是，$\mathfrak{I}_x = \mathfrak{I}_y$. 故阶理想只与循环子模有关，而与这个子模的特殊生成元素无关.

如果 $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{R}_s$ 是模 $\mathfrak{R}$ 的子模，而

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \cdots + \mathfrak{R}_s \tag{16}$$

的意义是：$\mathfrak{R}$ 为含所有 $\mathfrak{R}_i$ 的子模中的最小者；并且若

$$\mathfrak{R}_i \cap (\mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_{i-1} + \mathfrak{R}_{i+1} + \cdots + \mathfrak{R}_s) = 0 \tag{17}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, s),$$

則說 $\mathfrak{R}$ 是子模 $\mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_s$ 的直接和. 如果这些条件成立，則記作 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_s$. 如同在向量空間的情形，$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_s$ 必須而且只須 $\mathfrak{R}$ 里每个 $x$ 有一种而且只有一种方法写成 $x_1 + x_2 + \cdots + x_s$ 的形状，这里 $x_i \in \mathfrak{R}_i$.

令 $\mathfrak{o}$ 是主理想整区，則 $\mathfrak{o}$-模的基本結构定理可述之如次：

**定理 6.** 如果 $\mathfrak{o}$ 是一个主理想整區，則任意有限生成的 $\mathfrak{o}$-模

是循环子模的直接和。

証 令$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$是$\mathfrak{R}$的生成元素的集合。与前此一样，引入基为$(t_1, t_2, \cdots, t_n)$的自由模$\mathfrak{F}$，及$\mathfrak{F}$到$\mathfrak{R}$上的o–同态$T: \sum\phi_i t_i \to \sum\phi_i e_i$。令$\mathfrak{N}$是核，则$\mathfrak{N}$有$m \leqslant n$个元素的一个基。就当前目的来說，我們只需要較弱的結果，即$\mathfrak{N}$是有限生成的。令$(v_1, v_2, \cdots, v_m)$是生成元素的集合，并且与前面一样令$v_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} t_j \ (i = 1, 2, \cdots, m)$是联結$v_i$及$t_j$的关系。今以$(t_1', t_2', \cdots, t_n')$代替$t_j$，并以$(v_1', v_2', \cdots, v_m')$代替$v_i$，这里$t_i' = \sum\mu_{ij} t_j$，$v_p' = \sum\nu_{pq} v_q$而且$(\mu)$及$(\nu)$都是单位，则$\mathfrak{N}$的生成元素的新集合$(v_1', v_2', \cdots, v_m')$关于$\mathfrak{F}$的新基$(t_1', t_2', \cdots, t_n')$的陣是$(\nu)(\sigma)(\mu)^{-1}$。我們选择单位陣$(\mu)$及$(\nu)$使$(\nu)(\sigma)(\mu)^{-1}$有范式$\mathrm{diag}\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r, 0, \cdots, 0\}$。于是，联結新的生成元素的关系是

$$(18)\quad v_1' = \delta_1 t_1', v_2' = \delta_2 t_2', \cdots, v_r' = \delta_r t_r', v_{r+1}' = 0, \cdots, v_m' = 0.$$

今定义$e_i' = \sum\mu_{ij} e_j$；因为$(\mu)$是一个单位陣，故这些元素也是$\mathfrak{R}$的生成元素。我們可以断定

$$(19)\qquad \mathfrak{R} = \{e_1'\} \oplus \{e_2'\} \oplus \cdots \oplus \{e_n'\},$$

并且$\{e_i'\}$的阶理想在$i \leqslant r$时是$(\delta_i)$，而在$i > r$时是$(0)$。这因为，$e_i'$是生成元素，故(16)成立。要証(17)成立，必須証明：如果$\sum_1^n \beta_i e_i' = 0$，则每个$\beta_i e_i' = 0$。因为$t_i' = \sum\mu_{ij} t_j$，$t_i' T = e_i'$。所以$\sum\beta_i e_i' = 0$可推得$\sum\beta_i t_i' \in \mathfrak{N}$。因为$v_i'$是$\mathfrak{N}$的生成元素，这說明$\sum_1^n \beta_i t_i' = \sum_1^r \gamma_j v_j'$。所以，

$$\beta_1 t_1' + \beta_2 t_2' + \cdots + \beta_n t_n' = \gamma_1\delta_1 t_1' + \gamma_2\delta_2 t_2' + \cdots + \gamma_r\delta_r t_r'.$$

因为$t_i'$构成$\mathfrak{F}$的一个基，由此就推得

$$i \leqslant r \text{ 时 } \beta_i = \gamma_i\delta_i, \text{而 } i > r \text{ 时 } \beta_i = 0.$$

故在$i > r$时必然地$\beta_i e_i' = 0$。又因为$v_i' \in \mathfrak{N}$，而$i \leqslant r$时$v_i' = \delta_i t_i'$，故$v_i' T = \delta_i e_i' = 0$。于是在$i \leqslant r$时也有$\beta_i e_i' = \gamma_i\delta_i e_i' = 0$。这証明了我們的断定的前半，也完成了定理6的証明。

我們还曾指出，在 $i > r$ 时 $\beta_i e'_i = 0$ 推得 $\beta_i = 0$. 故阶理想 $\mathfrak{I}_{e'_i} = (0)$. 又我們已知，如果 $i \leqslant r$，則 $\beta_i e'_i = 0$ 必須而且只須 $\beta_i$ 是 $\delta_i$ 的倍数. 故对于这些 $i$, $\mathfrak{I}_{e'_i} = (\delta_i)$. 这証明了上面断定的后半.

今就我們的結果給出另一个說明. 首先，我們看到：如果生成元素 $e'_j$ $(j = r+1, \cdots, n)$ 有阶理想 $= (0)$，則如 $\{e'_{r+1}\}, \{e'_{r+2}\}, \cdots, \{e'_n\}$ 的循环子模的直接和是一个自由模. 这因为：如果 $\beta_{r+1}e'_{r+1} + \beta_{r+2}e'_{r+2} + \cdots + \beta_n e'_n = 0$，則每个 $\beta_j e'_j = 0$；又因为 $\mathfrak{I}_{e'_j} = (0)$，故 $\beta_j = 0$. 其次我們要說，$\mathfrak{R}$ 的有限阶元素的子集合 $\mathfrak{S}$ 是一个子模. 这因为，如果 $y_1, y_2 \in \mathfrak{S}$ 而 $\beta_i \neq 0$ 时 $\beta_i y_i = 0$，則 $\beta_1\beta_2(y_1 - y_2) = 0$，并且 $\beta_1\beta_2 \neq 0$. 如果 $y \in \mathfrak{S}$，則对于任意 $\alpha$ 还有 $\alpha y \in \mathfrak{S}$. 今将証明：由所有綫性組合 $\alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \cdots + \alpha_r e'_r$ 构成的子模 $\bar{\mathfrak{S}} = \{e'_1\} \oplus \{e'_2\} \oplus \cdots \oplus \{e'_r\}$ 确是 $\mathfrak{R}$ 里有限阶元素的子模 $\mathfrak{S}$. 因为 $e'_i \in \mathfrak{S}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$，故 $\bar{\mathfrak{S}} \subseteq \mathfrak{S}$. 另一方面，令 $y = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \cdots + \alpha_n e'_n \in \mathfrak{S}$，則存在有一个 $\beta \neq 0$，使

$$\beta\alpha_1 e'_1 + \beta\alpha_2 e'_2 + \cdots + \beta\alpha_n e'_n = 0.$$

我們已知，由此可推出 $j > r$ 时 $\beta\alpha_j = 0$. 故 $j > r$ 时 $\alpha_j = 0$ 而 $y \in \bar{\mathfrak{S}}$. 于是，$\mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{S}}$. 但显然 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \{e'_{r+1}\} \oplus \cdots \oplus \{e'_n\} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{E}$ 是自由模，这里 $\mathfrak{E} = \{e'_{r+1}\} \oplus \cdots \oplus \{e'_n\}$. 这証明了下面的定理.

**定理 7.** 如果 $\mathfrak{o}$ 是一个主理想整區，則任意有限生成的 $\mathfrak{o}$-模是有限階元素的子模与一个自由模的直接和.

最后我們要說：在分解 $\mathfrak{R} = \{e'_1\} \oplus \{e'_2\} \oplus \cdots \oplus \{e'_n\}$ 里可摘去阶理想是 $(\delta_i) = (1)$ 的項 $\{e'_i\}$. 如果有 $h$ 个这样的項，則可記 $e'_{h+j} = f_j$ $(j = 1, 2, \cdots, t$，这里 $t = n - h)$. 我們还用 $u$ 表示有限阶的 $f$ 的个数 $r - h$，用 $v$ 表示其余的 $f$ 的个数 $n - r$，并且把記法 $\delta_{h+j}$ 改为 $\delta_j$. 于是，

$$\mathfrak{R} = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \cdots \oplus \{f_t\}, \tag{20}$$

这里

$$\mathfrak{I}_{f_j} = (\delta_j) \ (j = 1, \cdots, u), \quad \mathfrak{I}_{f_k} = (0) \tag{21}$$

$(k = u + 1, \cdots, t)$; $\delta_j | \delta_{j'}$, $(j \leqslant j')$.

在普通的交換羣情形，我們的結果就特殊化成下面的两个定理：

**定理 8.** 任意有限生成的交換羣是循环羣的直接和.

**定理 9.** 任意有限生成的交換羣是一个有限羣与一个自由羣直接和.

有限羣是 $\mathfrak{S} = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \cdots \oplus \{f_u\}$；如果 $\delta_j$ 正規化为正数，則 $\mathfrak{S}$ 的阶是 $\delta_1\delta_2 \cdots \delta_u$.

**10. 不变性定理**　本节要証：阶理想 $(\delta_1), (\delta_2), \cdots, (\delta_u)$ 及自由部分 $\{f_{u+1}\} \oplus \{f_{u+2}\} \oplus \cdots \oplus \{f_t\}$ 里 $f$ 的个数 $v = t - u$ 是不变的. 今先討論証明中需要的关于 $\mathfrak{o}$–模方面更多的观念.

令 $\mathfrak{R}$ 是一个 $\mathfrak{o}$–模，$\mathfrak{S}$ 是一个子模，而 $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ 是陪集 $x + \mathfrak{S}$ 的商羣. 如果 $\alpha \in \mathfrak{o}$ 而 $x + \mathfrak{S} \in \mathfrak{R}/\mathfrak{S}$，定义 $\alpha(x + \mathfrak{S}) = \alpha x + \mathfrak{S}$. 因为 $\mathfrak{S}$ 在純量乘法下是封閉的，故这里給出的結果 $\alpha x + \mathfrak{S}$ 与陪集 $x + \mathfrak{S}$ 里选取的代表 $x$ 无关. 我們易知，$\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ 关于这个純量乘法的定义化为一个 $\mathfrak{o}$–模，它的証明与在向量空間的証明相同（参看第一章，§9）. 我們还注意到：如果 $\mathfrak{R}$ 是有限生成的，生成元素是 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$，則 $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ 是有限生成的，其生成元素是 $e_1 + \mathfrak{S}$, $e_2 + \mathfrak{S}, \cdots, e_n + \mathfrak{S}$.

次設 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{o}$ 里一个理想，对于所有 $\beta \in \mathfrak{B}$ 及所有 $x \in \mathfrak{R}$ 具有性質 $\beta x = 0$. 令 $\bar{\alpha} = \alpha + \mathfrak{B}$ 是差环 $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{B}$ 里一个陪集，則定义 $\bar{\alpha}x = \alpha x$. 如果 $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1$，則 $\alpha - \alpha_1 = \beta \in \mathfrak{B}$. 所以，$\alpha x = (\alpha_1 + \beta)x = \alpha_1 x$. 故 $\bar{\alpha}x$ 是 $\bar{\mathfrak{o}}$ 里的 $\bar{\alpha}$ 与 $\mathfrak{R}$ 里的 $x$ 的单値函数. 容易驗証：$\mathfrak{R}$ 是关于这个函数的一个 $\bar{\mathfrak{o}}$–模.

今把不变性的証明分作若干段給出. 首先，令 $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$ 是一个自由模，其基为 $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$. 令 $\mathfrak{N}$ 是一个子模，并設 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 表示 $\mathfrak{N}$ 的一个基. 則用在定理 6 的証明里的新元素 $t'_i$, $v'_p$ 分别构成 $\mathfrak{F}$ 与 $\mathfrak{N}$ 的基. 由关系(18)联結这些元素. 今因为基元素沒有一个是 0，显然(18)里有 $r = m$. 所以，$t$ 的个数不少于 $v$ 的个数；于是 $m \leqslant n$. 如果 $\mathfrak{N} = \mathfrak{F}$，則可把 $t'$ 与 $v'$ 互换而証

得 $m = n$。这証明了自由 $\mathfrak{o}$-模的任意基里元素的个数是不变数，这里 $\mathfrak{o}$ 为一个主理想整区。仿照向量空間，这个数自叫做自由模的**維数**。

次設 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$ 的每个元有有限阶。令

$$\mathfrak{S} = \{f'_1\} \oplus \{f'_2\} \oplus \cdots \oplus \{f'_{t'}\}$$

是另一种分解为循环子模使 $\mathfrak{J}'_j = (\delta'_j) \neq (0)$ 而 $\delta'_j | \delta'_k (j \leqslant k)$。我們要証 $t = t'$ 及 $(\delta_j) = (\delta'_j)(j = 1, 2, \cdots, t)$。定义一个分解 $\mathfrak{S} = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \cdots \oplus \{f_t\}$ 的**长度**为 $\sum s_i$，这里 $s_i$ 是 $\delta_i$ 的长度。設第一种分解有最小长度，并且将用归納法証明关于这个最小长度的定理。

令 $\pi$ 是一个固定素数，并令 $\mathfrak{S}'$ 表示 $\mathfrak{S}$ 里能使 $\pi y = 0$ 的元素 $y$ 的子集合。$\mathfrak{S}'$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个子模。設 $y = \sum \gamma_i f_i \in \mathfrak{S}'$，則$\sum \pi \gamma_i f_i = 0$。于是，$\pi \gamma_i$ 可用 $\delta_i$ 除尽。由此推得 $\delta_i | \gamma_i$，或是 $\pi | \delta_i$。如果前者成立，則 $\gamma_i f_i = 0$；如果后者成立，則 $\gamma_i$ 是 $\varepsilon_i = \delta_i \pi^{-1}$ 的一个倍数。故 $y$ 的形状为 $\sum_h^t \rho_j \varepsilon_j f_j$，这里 $h$ 是最小整数能使 $\delta_h$ 被 $\pi$ 除尽的。这就証明了

$$\mathfrak{S}' = \{\varepsilon_h f_h\} \oplus \{\varepsilon_{h+1} f_{h+1}\} \oplus \cdots \oplus \{\varepsilon_t f_t\}.$$

同理，得

$$\mathfrak{S}' = \{\varepsilon'_{h'} f'_{h'}\} \oplus \cdots \oplus \{\varepsilon'_{t'} f'_{t'}\}.$$

因为 $\mathfrak{S}'$ 的每个元素适合方程 $\pi y = 0$，而 $\mathfrak{S}'$ 可看作 $\bar{\mathfrak{o}}$-模，其中 $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/(\pi)$。因为 $\pi$ 是素数，故知 $\bar{\mathfrak{o}}$ 是一个域(参看本书第一卷，习题 48 的第 2 题)。于是，$\mathfrak{S}'$ 是 $\bar{\mathfrak{o}}$ 上一个向量空間。故由維数不变性定理(或由关于自由模的上面結果)知，两种分解里基元素的个数相同。因此，$t - h = t' - h'$。

今选取 $\pi$ 是 $\delta_1$ 的一个因子，則 $h = 1$，而方程 $t - h = t' - h'$ 指明 $t' \geqslant t$。同理，如果取 $\pi$ 是 $\delta'_1$ 的一个因子，則得 $t \geqslant t'$。故 $t = t'$。我們今知道，如果选取 $\pi$ 是 $\delta_1$ 的一个因子，則 $h = 1$ 可推得 $h' = 1$；因此 $\pi$ 就也是 $\delta'_1$ 的一个因子。

其次考虑子模 $\pi\mathfrak{S}$。刚才使用的論証指出：

$$(22)\qquad \pi\mathfrak{S} = \{\pi f_k\} \oplus \{\pi f_{k+1}\} \oplus \cdots \oplus \{\pi f_t\}$$
$$= \{\pi f'_{k'}\} \oplus \{\pi f'_{k'+1}\} \oplus \cdots \oplus \{\pi f'_{t'}\},$$

这里 $k$ 与 $k'$ 分别是能使 $\delta_k$ 与 $\delta_{k'}$ 不是 $\pi$ 的相伴数的最小整数. 于是, $\pi f_l$ 的阶理想是 $(\varepsilon_l)$, 而 $\pi f'_{l'}$ 的阶理想是 $(\varepsilon'_{l'})$, 并且 $\varepsilon_l$ 与 $\varepsilon'_{l'}$ 适合可除性条件. 至此,我們可用归納法假設于模的长度而推得 $t-k=t-k'$, 及 $(\varepsilon_k)=(\varepsilon'_{k'})$, $(\varepsilon_{k+1})=(\varepsilon'_{k'+1})$, $\cdots$. 这些关系还推得 $(\delta_1)=(\delta'_1)$, $(\delta_2)=(\delta'_2)$, $\cdots$. 这就証明了模 $\mathfrak{S}$ 的 $(\delta_i)$ 的不变性.

最后, 考虑一般情形. 如果 $\mathfrak{S}$ 是有限阶元素所組成的子模, 刚才証明的結果指出: 有限阶的 $f_i$ 的个数 $u$ 与有限阶的 $f'_i$ 的个数 $u'$ 相同. 再則关于对应的阶理想有 $(\delta_i)=(\delta'_i)$. 今考虑模 $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$; 我們易知这个模是自由模,以 $f_{u+1}+\mathfrak{S}, \cdots, f_t+\mathfrak{S}$ 为基, 而且也以 $f'_{u+1}+\mathfrak{S}, \cdots, f'_{t'}+\mathfrak{S}$ 为基. 故由对于自由模已証的結果知, $t-u=t'-u$. 这就完成了下面的定理的証明:

**定理 10.** 令 $\mathfrak{R}=\{f_1\}\oplus\cdots\oplus\{f_t\}=\{f'_1\}\oplus\cdots\oplus\{f'_{t'}\}$ 是一个 $\mathfrak{o}$-模的兩种分解为非零的循環模,这里 $\mathfrak{o}$ 是一个主理想整區. 設階理想适合條件(21), 而对于 $f'_i$ 有类似的情况, 則 $t=t'$, 而 $\mathfrak{I}_{f_i}=\mathfrak{I}_{f'_i}(i=1,2,\cdots,t)$.

刚才証明的模定理可用以証明陣的不变因子的唯一性, 除了单位因子不計. 故得下面的定理

**定理 11.** 如果 $\mathrm{diag}\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r,0,\cdots,0\}$ 与 $\mathrm{diag}\{\delta'_1,\delta'_2,\cdots,\delta'_{r'},0,\cdots,0\}$ 是等价的 $m\times n$ 陣, 它們的元素在一个主理想整區 $\mathfrak{o}$ 里, 并且 $\delta_i|\delta_j(i\leqslant j)$, $\delta'_k|\delta'_l(k\leqslant l)$, 則 $r=r'$, 而 $\delta_i$ 是 $\delta'_i(i=1,2,\cdots,r)$ 的相伴元素.

証 令 $\mathfrak{F}$ 是基为 $(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 的一个自由模,并令 $\mathfrak{N}$ 是由 $v_1=\delta_1t_1,\cdots,v_r=\delta_rt_r, v_{r+1}=0,\cdots,v_m=0$ 生成的子模. 則 $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ 是循环模与 $n-r$ 維的一个自由模的直接和, 而这些循环模的阶理想是 $(\delta_1), (\delta_2), \cdots, (\delta_r)$. 另一方面,由等价的假設可推得: 我們能求出 $\mathfrak{N}$ 的一个新基 $(t'_1,t'_2,\cdots,t'_n)$ 及 $\mathfrak{N}$ 的新生成元素 $v'_1=\delta'_1t'_1, v'_2=\delta'_2t'_2, \cdots, v'_{r'}=\delta'_{r'}t'_{r'}, v'_{r'+1}=0, \cdots, v'_m=0$,

这就給出 $\mathfrak{I}/\mathfrak{N}$ 分解为循环模与 $n-r'$ 維的一个自由模的直接和，而这些循环模的阶理想是 $(\delta'_1), (\delta'_2), \cdots, (\delta'_{r'})$. 因为可除性条件成立，故由定理 10 推得 $r=r'$ 及 $(\delta_i)\neq(1)$ 时 $(\delta_i)=(\delta'_i)$. 由此可推知，对于所有 $i$ 有 $(\delta_i)=(\delta'_i)$.

次就这个結果給出另一个純粹用陣的証明. 与此同时还得出計算不变因子的一些有用公式.

我們首先观察到：如果 $(\nu)$ 是任意 $m\times n$ 陣，則 $(\nu)(\sigma)$ 的行是 $(\sigma)$ 的行的綫性組合. 故 $(\nu)(\sigma)$ 对于任意 $j$ 的 $j$-行子式是 $(\sigma)$的 $j$-行子式的綫性組合. 同理，$(\sigma)(\mu)$ 的 $j$-行子式是$(\sigma)$的 $j$-行子式的綫性組合. 合併这两个結果可見，$(\nu)(\sigma)(\mu)$ 的 $j$-行子式是 $(\sigma)$ 的 $j$-行子式的綫性組合. 今令 $\Delta_j(\sigma)$ 是 $(\sigma)$ 的 $j$-行子式的一个最高公因子，則我們的結果指出：如果 $(\tau)=(\nu)(\sigma)(\mu)$，則 $\Delta_j(\sigma)\mid\Delta_j(\tau)$. 如果 $(\mu)$ 及 $(\nu)$ 是单位，則还有 $\Delta_j(\tau)\mid\Delta_j(\sigma)$. 于是，$\Delta_j(\tau)$ 与 $\Delta_j(\sigma)$ 是相伴的. 今应用这个結果于等价的陣的范式

$$\operatorname{diag}\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r, 0, \cdots, 0\},$$
$$\operatorname{diag}\{\delta'_1, \delta'_2, \cdots, \delta'_{r'}, 0, \cdots, 0\}.$$

对于这些陣的 $\Delta_j$ 分別記做 $\Delta_j$ 及 $\Delta'_j$. 因为关于 $\delta$ 及 $\delta'$ 的可除性条件，故可取

$$\Delta_j=\delta_1\delta_2\cdots\delta_j \quad 及 \quad \Delta'_j=\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_j.$$

因为对于每个 $j$, $\Delta_j$ 是 $\Delta'_j$ 的相伴数，故 $r=r'$. 又 $\Delta_1=\delta_1$ 是 $\Delta'_1=\delta'_1$ 的相伴数. 而 $\delta_1\delta_2$ 是 $\delta'_1\delta'_2$ 的相伴数，可推得 $\delta_2$ 与 $\delta'_2$ 是相伴的. 这样継續下去可見：对于每个 $i$, $\delta_i$ 与 $\delta'_i$ 是相伴数. 这就还証明了下面的定理.

**定理 12.** 令 $\Delta_j(\sigma)$是 $(\sigma)$ 的 $j$-行子式的一个最高公因子，幷設 $j\leqslant r$ 時 $\Delta_j(\sigma)\neq 0$，則元素 $\delta_1=\Delta_1(\sigma)$, $\delta_2=\Delta_2(\sigma)\Delta_1(\sigma)^{-1}$, $\cdots$, $\delta_r=\Delta_r(\sigma)\Delta_{r-1}(\sigma)^{-1}$ 構成 $(\sigma)$ 的不變因子的集合.

**11. 向量空間关于綫性变换的分解** 今来論述 $\Phi$ 上向量空間里一个綫性变换 $A$. 我們应用上面結果于由 $A$ 决定的 $\Phi[\lambda]$-模

$\mathfrak{N}$. 因为每个向量 $x$ 有一个指导多项式 $\mu_x(\lambda)\neq 0$, $\mathfrak{R}=\{f_1\}\oplus\{f_2\}\oplus\cdots\oplus\{f_t\}$, 这里 $\mathfrak{J}_{f_j}=(\delta_j)\neq(0)$, $\neq(1)$, 并且如果 $j\leqslant h$,则 $\delta_j|\delta_h$. 故不变因子理想 $(\delta_j)$ 是唯一决定的.

如果 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\Phi$ 上 $\mathfrak{R}$ 的一个基,而 $e_iA=\sum\alpha_{ij}e_j$, 则 $(\alpha)$ 是 $A$ 关于这个基的陣, 而元素 $v_i=\sum\alpha_{ij}t_j-\lambda t_i$ 构成自由模 $\mathfrak{F}$ 与 $\mathfrak{R}$ 之間的同态 $T$ 的核 $\mathfrak{N}$ 的一个基. 所以,必須化为范式以求不变因子理想的陣是

$$(\sigma)=\lambda 1-(\alpha)=\begin{bmatrix}\lambda-\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1n}\\ -\alpha_{21} & \lambda-\alpha_{22} & \cdots & -\alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & \lambda-\alpha_{nn}\end{bmatrix}. \tag{23}$$

这个陣的范式是

$$\operatorname{diag}\{1, 1, \cdots, 1, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_t\}, \tag{24}$$

这里假定 $\delta_i=\delta_i(\lambda)$ 的首項系数是 1. 我們的結果还指出怎样获得 $f$ 的一个集合使 $\mathfrak{R}=\{f_1\}\oplus\{f_2\}\oplus\cdots\oplus\{f_t\}$. 如果 $(\mu)$ 及 $(\nu)$ 是单位陣使 $(\nu)(\sigma)(\mu)$ 是范式, 并且 $e_i'=\sum\mu_{ij}^*e_j$, $(\mu^*)=(\mu)^{-1}$,則可取 $f_i=e'_{n-t+i}$.

把循环子空間 $\{f_i\}$ 里的 $\Phi$–基合攏起来得 $\mathfrak{R}$ 的一个 $\Phi$–基. 如果 $\delta_i$ 的度数是 $n_i$,則 $(f_i, f_iA, \cdots, f_iA^{n_i-1})$ 是 $\{f_i\}$ 的一个基. 于是,

$$(f_1, f_1A, \cdots, f_1A^{n_1-1}; f_2, f_2A, \cdots, f_2A^{n_2-1}; \cdots; \cdots, f_tA^{n_t-1})$$

是 $\Phi$ 上 $\mathfrak{R}$ 的一个基. $A$ 关于这个基的陣的形状是

$$\begin{bmatrix}B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_t\end{bmatrix}, \tag{25}$$

这里,对角块 $B_i$ 是 $\delta_i(\lambda)$ 的友陣. 由不变因子理想所完全决定的陣(25)叫作 $A$ 的**約当典型陣**.

使用下面的考察可得更精致的典型陣．令

$$\delta_i(\lambda) = \pi_{i1}(\lambda)^{k_{i1}}\pi_{i2}(\lambda)^{k_{i2}} \cdots \pi_{is_i}(\lambda)^{k_{is_i}}$$

是 $\delta_i$ 分解为不同素因子的冪的因子分解．由 §4 的定理 3 得 $\{f_i\} = \{f_{i1}\} \oplus \{f_{i2}\} \oplus \cdots \oplus \{f_{is_i}\}$，这里 $f_{ij}$ 的指导多項式是 $\pi_{ij}(\lambda)^{k_{ij}}$．今在每个 $\{f_{ij}\}$ 里选取本章 §4 上所給类型的一个基，这些基合併起来就給出 $\mathfrak{R}$ 的一个基，而 $A$ 关于这个基的陣是

$$\begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_t \end{bmatrix}, \tag{26}$$

这里 $C_i$ 与(25)里 $B_i$ 的阶相同，而

$$C_i = \begin{bmatrix} C_{i1} & & & \\ & C_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{is_i} \end{bmatrix}, \tag{27}$$

这里

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} P_{ij} & & & & \\ N_{ij} & P_{ij} & & & \\ & N_{ij} & P_{ij} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & N_{ij} & P_{ij} \end{pmatrix} (k_{ij}\text{ 个块}), \tag{28}$$

并且 $P_{ij}$ 是 $\pi_{ij}(\lambda)$ 的友陣，而 $N_{ij}$ 具有(10)的形状．这样得出的陣叫做 $A$ 的**古典典型陣**．它显出素因子 $\pi_{ij}(\lambda)$ 及这些素因子在 $\delta_i(\lambda)$ 的因子分解里的指数．理想 $(\pi_{ij}(\lambda)^{k_{ij}})$ 叫做 $A$ 的**初等因子理想**．多項式 $\pi_{ij}(\lambda)^{k_{ij}}$ 叫做 $(\sigma) = \lambda 1 - (\alpha)$ 的**初等因子**．

例如，設 $\lambda 1 - (\alpha)$ 里 $\neq 1$ 的不变因子是 $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$ 及 $\lambda^6 - 3\lambda^4 + 3\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1)^3$，則約当典型陣是

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & & & \\
-1 & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & 1 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0
\end{pmatrix}.
$$

这里初等因子是 $(\lambda-1)^2$, $(\lambda+1)$, $(\lambda-1)^3$, $(\lambda+1)^3$. 所以，古典典型陣是

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & & \\
 & & -1 & & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & & & \\
 & & & 0 & 1 & 1 & & & \\
 & & & & & & -1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 1 & -1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}
$$

要說明求典型陣的方法，令 $A$ 是綫性变換使

$$
\begin{aligned}
e_1A &= -e_1 - 2e_2 + 6e_3, \\
e_2A &= -e_1 \qquad\;\; + 3e_3, \\
e_3A &= -e_1 - \;\; e_2 + 4e_3,
\end{aligned}
$$

这里陣 $(\alpha)$ 是

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

而

$$\lambda 1 - (\alpha) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{bmatrix}.$$

我們有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda+2 & -3 \end{bmatrix} [\lambda 1 - (\alpha)] \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3+\lambda \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}.$$

故

$$(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3+\lambda \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\mu)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

而

$$e_1' = e_1 + \lambda e_2 - 3e_3 = e_1 + e_2 A - 3e_3 = 0,$$

$$e_2' = -e_2 + e_3,$$

$$e_3' = -e_2.$$

要得出約当陣，我們使用基 $f_1 = e_2', f_2 = e_3', f_3 = e_3' A = e_1 - 3e_3$。于是，約当陣是

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

把 $(\alpha)$ 变到这个陣的陣是 $(f_1, f_2, f_3)$ 关于 $(e_1, e_2, e_3)$ 的陣，而这个陣是

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

我們可以作驗算：

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\-1 & 0 & 3\\-1 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & -3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

今就 $\Phi$ 是复数域或更一般的任意代数閉域[1]情形考虑古典典型陣。此时正次数的不可約多項式只是一次多項式；所以初等因子的形状是 $(\lambda-\rho)^k$. 对应于这个初等因子的块(即(28)里的 $C_{ij}$)是

$$\left.\begin{bmatrix}\rho & & & \\ 1 & \rho & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \rho\end{bmatrix}\right\}k \tag{29}$$

古典典型陣就由这个类型的一块块安置在主对角綫上.

次設 $\Phi$ 是实数域；此时正次数的不可約多項式是一次多項式及二次多項式 $\lambda^2-\beta\lambda-\gamma$，这里 $\beta^2+4\gamma<0$. 初等因子的形状是 $(\lambda-\rho)^k$, $(\lambda^2-\beta\lambda-\gamma)^k$. 与 $(\lambda-\rho)^k$ 对应的陣块是(29)，而与 $(\lambda^2-\beta\lambda-\gamma)^k$ 对应的陣块是

$$\begin{pmatrix}\begin{array}{|cc|}\hline 0 & 1\\ \gamma & \beta\\ \hline\end{array} & & & \\ \begin{array}{|cc|}\hline 0 & 0\\ 1 & 0\\ \hline\end{array} & \begin{array}{|cc|}\hline 0 & 1\\ \gamma & \beta\\ \hline\end{array} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \begin{array}{|cc|}\hline 0 & 0\\ 1 & 0\\ \hline\end{array} & \begin{array}{|cc|}\hline 0 & 1\\ \gamma & \beta\\ \hline\end{array}\end{pmatrix}(k\text{ 个块}) \tag{30}$$

---

1) 如果系数在一个域里的多項式它的根也都在这个域里，則这样的域叫做代数閉域．一个等价的定义是：系数在域里的每个多項式能分解为一次多項式时，这样的域叫做代数閉域．

## 習 題 25

1. 求与

$$\begin{bmatrix} 17 & -8 & -12 & 14 \\ 46 & -22 & -35 & 41 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

相似的古典典型陣，并求使这个陣变为典型陣的陣.

2. 証明下面定理：$\Phi_n$ 里两个陣 $(\alpha)$ 与 $(\beta)$ 相似的充要条件是 $\lambda 1-(\alpha)$ 与 $\lambda 1-(\beta)$ 在 $\Phi[\lambda]_n$ 里有相同的不变因子.

3. 証明：任意陣与它的折轉陣相似.

4. 已知初等因子为 $(\lambda-1)^3$, $(\lambda-1)$, $(\lambda^2+1)^4$, $(\lambda^2+1)^2$, $(\lambda^2+1)$, $(\lambda+2)$, 則不变因子是什么?

5. 証明：如果 $f$ 是任意向量，它的指导多項式是 $A$ 的最低多項式，則存在一个不变子空間 $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}A\subseteq\mathfrak{S})$ 使 $\mathfrak{R}=\{f\}\oplus\mathfrak{S}$.

6. 令 $\mathfrak{S}$ 是一个不变子空間使 $A$ 在 $\mathfrak{S}$ 里及在 $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ 里誘导出的变换的不变因子合併起来能給出 $A$ 的所有不变因子. 証明：有另一个不变子空間 $\mathfrak{U}$ 存在，使 $\mathfrak{R}=\mathfrak{S}\oplus\mathfrak{U}$.

**12. 特征多項式及最低多項式** 仍旧令 $\mathfrak{R}=\{f_1\}\oplus\{f_2\}\oplus\cdots\oplus\{f_t\}$，这里 $f_i$ 的阶理想是不变因子理想 $(\delta_i)$. 故 $f_i$ 的指导式是 $\delta_i$，而且如果 $i\leqslant j$ 时 $\delta_i|\delta_j$. 我們知道，$A$ 的最低多項式 $\mu(\lambda)$ 是生成元素 $f_i$ 的指导多項式的最小公倍式. 由可除性条件知，这个 l. c. m. 是 $\delta_t(\lambda)$. 故 $\mu(\lambda)=\delta_t(\lambda)$.

令 $(\alpha)$ 是 $A$ 的任意陣. 我們知道，如果 $\Delta_n(\lambda)=\det(\lambda 1-(\alpha))$，而 $\Delta_{n-1}(\lambda)$ 是 $\lambda 1-(\alpha)$ 的 $(n-1)$-行子式的最高公因子，則下面关系成立：

$$\Delta_n(\lambda)=\delta_1(\lambda)\delta_2(\lambda)\cdots\delta_t(\lambda), \tag{31}$$

$$\mu(\lambda)=\delta_t(\lambda)=\Delta_n(\lambda)[\Delta_{n-1}(\lambda)]^{-1}. \tag{32}$$

多項式 $\Delta_n(\lambda)$ 叫做 $(\alpha)$ 的（或 $A$ 的）**特征多項式**. 如果引用(23)，可見

$$\Delta_n(\lambda)=\lambda^n-\alpha_1\lambda^{n-1}+\alpha_2\lambda^{n-2}-\cdots+(-1)^n\alpha_n, \tag{33}$$

这里 $\alpha_i$ 是 $(\alpha)$ 里 $i$ 阶对角子式的和；其中特别重要的是第一个及末了一个 $\alpha$，它們是

$$\alpha_1=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{nn},\quad \alpha_n=\det(\alpha). \tag{34}$$

前者叫做 $(\alpha)$ 的跡. $(\alpha)$ 的这个函数的性質将在 § 14 里講述.

至此我們知道，如果 $\nu(\lambda)$ 是使 $\nu(A)=0$ 的任意多項式，則 $\nu((\alpha))=0$. 如果 $\mu(\lambda)$ 是 $A$ 的最低多項式，則 $\mu(\lambda)$ 也是 $(\alpha)$ 的最低多項式. 所以，我們的結果可述成下面关于陣的定理：

**定理 13.** 令 $(\alpha)$ 是 $\Phi_n$ 里一个陣，并且令 $\Delta_n(\lambda)=\det(\lambda 1-(\alpha))$，及 $\mu(\lambda)=\Delta_n(\lambda)[\Delta_{n-1}(\lambda)]^{-1}$，这里 $\Delta_{n-1}(\lambda)$ 是 $\lambda 1-(\alpha)$ 的 $(n-1)$-行子式的最高公因子. 則 1) $\Delta_n((\alpha))=\mu((\alpha))=0$; 2) 如果 $\nu(\lambda)$ 是使 $\nu((\alpha))=0$ 的任意多項式，則 $\mu(\lambda)|\nu(\lambda)$; 3) $\mu(\lambda)$ 及 $\Delta_n(\lambda)$ 有相同的素因子.

由关于 $A$ 所作的証明知，前两个性質是显然成立的. 最后一个性質可由(31)及所有 $\delta_i(\lambda)$ 是 $\delta_t(\lambda)=\mu(\lambda)$ 的因子的事实得出.

定理 13 是汉米頓-凱萊关于特征多項式的定理及福路本紐斯关于最低多項式的定理的合成. 这些結果的直接用陣作証明見于下一节.

## 習 題 26

1. 証明：$A$ 是循环变換必須而且只須 $\lambda 1-(\alpha)$ 只有一个 $\neq 1$ 的不变因子.

2. 証明：如果 $(\alpha)$ 是无势陣，則 $\lambda 1-(\alpha)$ 的不变因子的形狀都是 $\lambda^m$. 由此証明：任意无势陣与形狀如

$$\begin{bmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_q \end{bmatrix}$$

的陣相似，这里 $N_i$ 的形狀是

$$N_i=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. 証明：元素在复数域里的陣与对角陣相似必須而且只須它的最低多項式没有重根.

4. 証明：如果 $(\alpha)$ 是同势陣，則 $\lambda 1-(\alpha)$ 的初等因子是 $\lambda$ 或者是 $\lambda-1$. 应用这个結果証明第二章，§13 末了一段关于 $\Delta$ 是一个域时的結果.

5. 証明：如果 $u$ 是非零向量，使 $uA=\rho u$，則 $\rho$ 是特征多項式的根. 反过来，証明：如果 $\rho$ 是特征多項式的一个根，屬于 $\Phi$ 里，則有非零向量 $u$ 存在，使 $uA=\rho u$.

6. 使 $uA=\rho u$ 的非零向量 $u$ 叫做 $A$ 的一个特征向量. 証明：如果 $\Phi$ 是代数閉域，則这样的向量必然存在. 証明：如果 $\Phi$ 是实数域，則 $\Phi$ 上奇数維空間 $\mathfrak{R}$ 里任意綫性变換拥有特征向量.

**13. 定理 13 的直接証明** 我們已給的定理 13 的証明若从陣論来看未免覺得有些不直率. 本节将推广含于这个定理的結果并对这些結果給出直接的証明. 先設 $\mathfrak{o}$ 是带恆等元素的任意交換环. 令 $\mathfrak{o}[\lambda]$ 是含不定量 $\lambda$ 的多項式环,并且討論陣环 $\mathfrak{o}[\lambda]_n$; 这个环含有元素属于 $\mathfrak{o}$ 的陣的子环 $\mathfrak{o}_n$,它还含有陣

$$\lambda 1 = \operatorname{diag}\{\lambda, \lambda, \cdots, \lambda\},$$

显然这个陣属于 $\mathfrak{o}[\lambda]_n$ 的心. 当前我們主要观察的目标是 $\mathfrak{o}[\lambda]_n = \mathfrak{o}_n[\lambda 1]$,而 $\lambda 1$ 关于 $\mathfrak{o}_n$ 是超越元素. 这因为,令 $(\alpha(\lambda))$ 是 $\mathfrak{o}[\lambda]_n$ 里一个任意陣,并記

$$\alpha_{ij}(\lambda) = \alpha_{ij0} + \alpha_{ij1}\lambda + \alpha_{ij2}\lambda^2 + \cdots. \tag{35}$$

如果我們忆起积 $(\alpha)\lambda 1$ 可由以 $\lambda$ 乘 $(\alpha)$ 的所有元素而得,则可知:

$$(\alpha(\lambda)) = (\alpha)_0 + (\alpha)_1\lambda 1 + (\alpha)_2(\lambda 1)^2 + \cdots, \tag{36}$$

这里 $(\alpha)_k$ 是陣,它的 $(i, j)$-位置上的元素是 $\alpha_{ijk}$. 次設 $(\alpha)_0 + (\alpha)_1\lambda 1 + (\alpha)_2(\lambda 1)^2 + \cdots = 0$,则左端的 $(i, j)$-元素可由(35)給出. 因为这个元素等于 0,故 $\alpha_{ijk} = 0$. 于是,每个 $(\alpha)_k = 0$,这就証明了 $\lambda 1$ 关于 $\mathfrak{o}_n$ 的超越性.

如果

$$\phi(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 + \cdots$$

是 $\mathfrak{o}[\lambda]$ 里一个多項式,则 $\phi((\alpha))$ 是陣

$$\beta_0 1 + \beta_1(\alpha) + \beta_2(\alpha)^2 + \cdots,$$

这里 $\beta_i(\gamma)$ 通常可由以 $\beta_i$ 乘 $(\gamma)$ 的所有元素而得出. 故 $\phi((\alpha))$ 可由 $\phi(\lambda)1 = \beta_0 1 + \beta_1(\lambda 1) + \beta_2(\lambda 1)^2 + \cdots$ 里以 $(\alpha)$ 代替 $\lambda 1$ 而得.

如果 $(\alpha) \in \mathfrak{o}_n$, 则定义特征多項式 $\Delta_n(\lambda)$ 是属于 $\mathfrak{o}[\lambda]$ 的多項式 $\det(\lambda 1 - (\alpha))$. 今証下面的定理.

**定理 14**(漢米頓-凱萊). 如果 $(\alpha) \in \mathfrak{o}_n$, $\mathfrak{o}$ 是帶恆等元素的一个交換環,而 $\Delta_n(\lambda)$ 是特征多項式,则 $\Delta_n((\alpha)) = 0$.

証 我們已知恆等式[1]

---

1) 見本书第一卷,第二章的 § 4.

(37) $[\lambda 1-(\alpha)]\operatorname{adj}[\lambda 1-(\alpha)] = \det(\lambda 1-(\alpha))1 = \Delta_n(\lambda)1.$

陣 $\operatorname{adj}[\lambda 1-(\alpha)] \in \mathfrak{o}[\lambda]_n = \mathfrak{o}_n[\lambda 1]$，而它的元素的次数 $\leqslant n-1$。所以

$$\operatorname{adj}[\lambda 1-(\alpha)] = (\beta)_0(\lambda 1)^{n-1}+(\beta)_1(\lambda 1)^{n-2}+\cdots+(\beta)_{n-1}.$$

还有，如果 $\Delta_n(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n\alpha_n$，則

$$\Delta_n(\lambda)1 = (\lambda 1)^n - \alpha_1(\lambda 1)^{n-1} + \cdots + (-1)^n\alpha_n 1.$$

故恆等式(37)等价于

$$(38)\quad [\lambda 1-(\alpha)][(\beta)_0(\lambda 1)^{n-1}+(\beta)_1(\lambda 1)^{n-2}+\cdots+(\beta)_{n-1}] = (\lambda 1)^n - \alpha_1(\lambda 1)^{n-1} + \cdots + (-1)^n\alpha_n 1.$$

因此知 $\lambda 1-(\alpha)$ 是 $\mathfrak{o}_n[\lambda 1]$ 里 $\Delta_n(\lambda)1$ 的一个因子. 按因子定理[1]，这可推得

$$(\alpha)^n - \alpha_1(\alpha)^{n-1} + \cdots + (-1)^n\alpha_n 1 = 0,$$

就是所要証明的結果了.

次設 $\mathfrak{o}$ 是一个高斯整区，亦即带恆等元素的一个可交换整区，因子唯一分解定理在这个整区里成立. 对于这样整区有下面的

**定理 15** (福路本紐斯). 令 $(\alpha) \in \mathfrak{o}_n$，这里 $\mathfrak{o}$ 是一个高斯整區，并且令 $\Delta_n(\lambda)=\det(\lambda 1-(\alpha))$ 及 $\mu(\lambda)=\Delta_n(\lambda)[\theta(\lambda)]^{-1}$，这里 $\theta(\lambda)$ 是 $\lambda 1-(\alpha)$ 的 $(n-1)$-行子式的最高公因子，則 1) $\mu((\alpha))=0$，2) 如果 $\nu(\lambda)\in\mathfrak{o}[\lambda]$ 而 $\nu((\alpha))=0$，則在 $\mathfrak{o}[\lambda]$ 里 $\mu(\lambda)|\nu(\lambda)$，3) $\Delta_n(\lambda)$ 的任意不可約因子是 $\mu(\lambda)$ 的一个因子.

証　因为 $\mathfrak{o}[\lambda]$ 是一个高斯整区，保証了 $\theta(\lambda)$ 的存在. 因为 $(n-1)$-行子式中有些(例如，对角綫上子式)的首項系数是 1，故可設 $\theta(\lambda)$ 的首項系数是 1. 因为 $\theta(\lambda)$ 是所有 $(n-1)$-行子式的一个因子，显然它是 $\Delta_n(\lambda)$ 的一个因子. 商 $\mu(\lambda)$ 的首項系数是 1. 今令 $(\gamma(\lambda))$ 表示 $\mathfrak{o}[\lambda]_n$ 里的陣，由以 $\theta(\lambda)$ 除 $\operatorname{adj}[\lambda 1-(\alpha)]$ 的元素而得出，則由(37)有

$$(39)\quad [\lambda 1-(\alpha)](\gamma(\lambda)) = \mu(\lambda)1.$$

由前面証明里所用的論証知，这个关系可推得 $\mu((\alpha))=0$. 这

1) 見本书第一卷，第三章，§ 6.

証明了 1).

今令 $\mu^*(\lambda)$ 是能使 $\mu^*((\alpha)) = 0$ 的最低次非零多項式，我們可假定 $\mu^*(\lambda)$ 是本原多項式. 設 $\nu(\lambda)$ 是使 $\nu((\alpha)) = 0$ 的任意多項式. 如果 $P$ 是 $\mathfrak{o}$ 的商域,則在 $P[\lambda]$ 里可写出

$$\nu(\lambda) = q(\lambda)\mu^*(\lambda) + r(\lambda),$$

这里 $\deg r(\lambda) < \deg \mu^*(\lambda)$. 用 $\mathfrak{o}$ 里一个适宜的非零元素 $\eta$ 乘它，得关系

$$\eta\nu(\lambda) = q_1(\lambda)\mu^*(\lambda) + r_1(\lambda),$$

这里 $q_1(\lambda) = \eta q(\lambda)$，而 $r_1(\lambda) = \eta r(\lambda) \in \mathfrak{o}[\lambda]$. 把 $(\alpha)$ 代入这个关系得 $r_1((\alpha)) = 0$. 于是，由 $\mu^*(\lambda)$ 的次数是最低的假設知 $r_1(\lambda) = 0$. 故 $\mu^*(\lambda) | \eta\nu(\lambda)$. 因为 $\mu^*(\lambda)$是本原的,故 $\mu^*(\lambda) | \nu(\lambda)$. 特别有 $\mu^*(\lambda) | \mu(\lambda)$;又因为 $\mu(\lambda)$的首項系数是 1,故可假定 $\mu^*(\lambda)$ 的首項系数也是 1.

今令 $\mu(\lambda) = \mu^*(\lambda)\rho(\lambda)$. 因为 $\mu^*((\alpha)) = 0$,故把証明 1) 所用的論証倒轉就可見

$$\mu^*(\lambda)1 = [\lambda 1 - (\alpha)](\delta(\lambda)),$$

这里 $(\delta(\lambda)) \in \mathfrak{o}[\lambda]_n$. 于是,

$$\Delta_n(\lambda)1 = \mu^*(\lambda)\rho(\lambda)\theta(\lambda)1 = [\lambda 1 - (\alpha)](\delta(\lambda))\rho(\lambda)\theta(\lambda)1.$$

如果与(37)比較,并使用 $\lambda 1 - (\alpha)$ 不是 $\mathfrak{o}[\lambda]_n$里的零因子的事实[1]，得

$$\operatorname{adj}[\lambda 1 - (\alpha)] = (\delta(\lambda))\rho(\lambda)\theta(\lambda)1.$$

故 $\lambda 1 - (\alpha)$ 的所有 $(n-1)$-行子式可以 $\rho(\lambda)\theta(\lambda)$ 整除. 因为假設 $\theta(\lambda)$ 是 $(n-1)$-行子式的最高公因子,故知 $\rho(\lambda) = 1$. 于是，$\mu(\lambda) = \mu^*(\lambda)$;而 2) 就可由上面的証明得出.

要証 3)，可于(39)的两端求行列式,得

$$\Delta_n(\lambda)\det(\gamma(\lambda)) = [\mu(\lambda)]^n.$$

而 3) 就是这結果的一个直接推理.

---

1) 它的行列式是 $\Delta_n[\lambda] \neq 0$.

## 習 題 27

1. 証明.

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ -\alpha_1 & \alpha_0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

的特征多項式与最低多项式分别是

$$(\lambda^2 - 2\alpha_0\lambda + (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2))^2$$

与

$$\lambda^2 - 2\alpha_0\lambda + (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2).$$

**14. 跡及特征多項式的形式的性質** $(\alpha)$ 的跡 $\mathrm{tr}(\alpha)$ 曾定义为 $(\alpha)$ 的特征多項式里 $\lambda^{n-1}$ 的系数的負值. 由此知

(40) $$\mathrm{tr}(\alpha) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}.$$

如果在某扩张域里，特征多項式 $\Delta_n(\lambda) = \Pi(\lambda - \rho_i)$，則 $\rho_i$ 叫做 $(\alpha)$在这个域里的*特征根*. $\Delta_n(\lambda)$ 的系数是所謂 $\rho_i$ 的初等对称函数. 特别是，

(41) $$\mathrm{tr}(\alpha) = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n.$$

由(40),跡函数显然是綫性的:

(42) $$\mathrm{tr}[(\alpha) + (\beta)] = \mathrm{tr}(\alpha) + \mathrm{tr}(\beta), \quad \mathrm{tr}(\rho(\alpha)) = \rho\,\mathrm{tr}(\alpha).$$

我們还可驗証下面的性質:

(43) $$\mathrm{tr}(\alpha)(\beta) = \mathrm{tr}(\beta)(\alpha).$$

这因为，$(\alpha)(\beta)$ 的 $(i, i)$-元素是 $\sum_j \alpha_{ij}\beta_{ji}$，故

$$\mathrm{tr}(\alpha)(\beta) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\beta_{ji},$$

而这是 $(\alpha)$ 与 $(\beta)$ 里元素的对称函数. 故(43)成立.

不但 $(\alpha)(\beta)$ 与 $(\beta)(\alpha)$ 的跡相同，它們的特征多項式里其它系数也是相同的，因此它們有相同的特征多項式;这也可以直接驗証的，但下面的間接証明有它的特别趣味.

我們更一般地假設 $(\alpha)$ 是一个 $m \times n$ 陣，而$(\beta)$是一个 $n\times m$ 陣，它們的元素都在一个域里. 于是，乘法 $(\alpha)(\beta)$ 或 $(\beta)(\alpha)$ 都是可能的，它們的积順序是 $m \times m$ 陣与 $n \times n$ 陣. 令 $n \geqslant m$，我

們将証 $(\beta)(\alpha)$ 的特征多项式是 $(\alpha)(\beta)$ 的特征多项式的 $\lambda^{n-m}$ 倍.
先設 $(\alpha)$ 的形状是

$$(44)\qquad (\alpha)=\operatorname{diag}\{\overbrace{1,\cdots,1}^{r},0,\cdots,0\}.$$

如果

$$(\beta)=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nm}\end{bmatrix},$$

則

$$(\alpha)(\beta)=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \cdots & \beta_{rm}\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

$$(\beta)(\alpha)=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \cdots & \beta_{1r} & 0 & \cdots & 0\\ \beta_{21} & \cdots & \beta_{2r} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nr} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.$$

所以,如果 $g(\lambda)$ 表示

$$\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \cdots & \beta_{rr}\end{bmatrix}$$

的特征多项式,則 $(\alpha)(\beta)$ 与 $(\beta)(\alpha)$ 的特征多项式順序是 $\lambda^{m-r}g(\lambda)$ 与 $\lambda^{n-r}g(\lambda)$. 这就証明了我們的論断.

今設 $(\alpha)$ 是任意陣. 則有陣 $(\mu)\in L(\Phi,m)$ 及陣 $(\nu)\in L(\Phi,n)$ 存在使 $(\mu)(\alpha)(\nu)=(\alpha)_1$ 的形状为 (44). 令 $(\nu)^{-1}(\beta)(\mu)^{-1}=(\beta)_1$,則由上面的証明知,$(\beta)_1(\alpha)_1$ 的特征多项式是 $(\alpha)_1(\beta)_1$ 的特征多项式的 $\lambda^{n-m}$ 倍. 另一方面,

$$(\alpha)_1(\beta)_1=(\mu)(\alpha)(\nu)(\nu)^{-1}(\beta)(\mu)^{-1}=(\mu)(\alpha)(\beta)(\mu)^{-1}$$

与 $(\alpha)(\beta)$ 相似,而

$$(\beta)_1(\alpha)_1 = (\nu)^{-1}(\beta)(\mu)^{-1}(\mu)(\alpha)(\nu) = (\nu)^{-1}(\beta)(\alpha)(\nu)$$

与 $(\beta)(\alpha)$ 相似. 故 $(\alpha)(\beta)$ 与 $(\alpha)_1(\beta)_1$ 有相同的特征多項式，而 $(\beta)(\alpha)$ 与 $(\beta)_1(\alpha)_1$ 有相同的特征多項式. 故所論断的結果对于 $(\alpha)(\beta)$ 及 $(\beta)(\alpha)$ 成立. 这証明了下面的定理.

**定理 16.** 令 $(\alpha)$ 是一个 $m\times n$ 陣而 $(\beta)$ 是一个 $n\times m$ 陣，它們的元素在一个域內. 如果 $n\geqslant m$，則 $(\beta)(\alpha)$ 的特征多項式是 $(\alpha)(\beta)$ 的特征多項式的 $\lambda^{n-m}$ 倍.

### 習 題 28

1. (弗兰得斯 Flanders). 証明: $(\alpha)(\beta)$ 与 $(\beta)(\alpha)$ 里不得用 $\lambda$ 整除的初等因子相同. 还求出以 $\lambda$ 的冪作初等因子的关系.

**15. 循环 $\mathfrak{o}$–模的 $\mathfrak{o}$–自同态环** 本章余下各节将論述决定綫性变换能与一个給定的綫性变换可交換的問題，并且把这个問題推广于模.

如果 $A$ 是 $\Phi$ 上的 $\mathfrak{R}$ 里一个綫性变換，則与 $A$ 可交換的綫性变換的全体 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{L}$ 的一个子代数. 如果 $B\in\mathfrak{B}$，則 $\alpha_l B = B\alpha_l$，及 $AB = BA$. 故 $B$ 与属于由 1 与 $A$ 所生成的子代数 $\mathfrak{A} = \Phi_l[A]$ 的每个綫性变換 $\beta_{0l}+\beta_{1l}A+\beta_{2l}A^2+\cdots$ 可交換. 反过来，如果 $B$ 是羣 $\mathfrak{R}$ 里任意自同构，而它可与 $\mathfrak{A}$ 里每个元素交换，則 $B\in\mathfrak{B}$; 这因为对于所有 $\alpha$，$\alpha_l B = B\alpha_l$，因此 $B$ 是一个綫性变换，而 $BA = AB$.

如果 $\mathfrak{R}$ 如前看作一个 $\Phi[\lambda]$–模，則

$$x(\beta_{0l}+\beta_{1l}A+\cdots) = \phi(\lambda)x,$$

这里 $\phi(\lambda) = \beta_0+\beta_1\lambda+\cdots$. 所以，自同态 $B$ 可与 $\mathfrak{A}$ 里每个綫性变换交换必須而且只須 $(\phi(\lambda)x)B = \phi(\lambda)(xB)$. 故 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{R}$ 的 $\Phi[\lambda]$–自同态的集合重合. 因此又誘使我們采取模的观点，而考虑决定任意有限生成的 $\mathfrak{o}$–模的 $\mathfrak{o}$–自同态集合 $\mathfrak{B}$ 的問題，这里 $\mathfrak{o}$ 是主理想整区. 显然 $\mathfrak{B}$ 是羣 $\mathfrak{R}$ 的自同态环的一个子环.

按通例，以 $\mathfrak{o}_l$ 表示自同态 $\alpha_l: x\to\alpha x$ 的环，这里 $\alpha\in\mathfrak{o}$. 这个环是 $\mathfrak{o}$ 的一个同态象，故是可交換的. 因此 $\mathfrak{o}_l\subseteq\mathfrak{o}$– 自同态环 $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{o}_l$ 含于 $\mathfrak{B}$ 的心，也是显然的. 应該指出，在由綫性变换 $A$ 决定的

$\Phi[\lambda]$-模的特殊情形，环 $\Phi[\lambda]_l$ 恰是环 $\mathfrak{A}=\Phi_l[A]$.

我們先就循环 $\mathfrak{o}$-模的特殊情形考虑决定 $\mathfrak{B}$ 的問題. 这里无須假定 $\mathfrak{o}$ 是一个主理想整区，只假定 $\mathfrak{o}$ 是带恆等元素的一个交換环. 我們有下面的定理.

**定理 17.** 如果 $\mathfrak{o}$ 是带恆等元素的一个交換環，而 $\mathfrak{R}$ 是一个循環 $\mathfrak{o}$-模，則 $\mathfrak{R}$ 僅有映照 $x\to\alpha x$ 这樣的 $\mathfrak{o}$-自同態.

証 令 $\mathfrak{R}=\{e\}$，并令 $B$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个 $\mathfrak{o}$-自同态. 設 $eB=\beta e$. 如果 $x=\alpha e$，則 $xB=(\alpha e)B=\alpha(eB)=\beta(\alpha e)=\beta x$. 故 $B=\beta_l$.

**系** 如果 $A$ 是域上向量空間里一个循環綫性變換，則与 $A$ 可交換的僅有綫性變換是含 $A$ 的多項式(系數屬于 $\Phi_l$).

### 習 題 29

1. 証明：与

$$\begin{bmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{bmatrix}$$

可交換的陣是

$$\begin{bmatrix}\alpha_0 & & & & 0\\ \alpha_1 & \alpha_0 & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_0 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \alpha_{n-1} & \cdots & & \alpha_1 & \alpha_0\end{bmatrix},$$

这里 $\alpha_i$ 是 $\Phi$ 里任意元素.

## 16. 有限生成的 $\mathfrak{o}$-模的 $\mathfrak{o}$-自同态环的决定，$\mathfrak{o}$ 是主理想整区

今設 $\mathfrak{R}$ 是一个有限生成的 $\mathfrak{o}$-模，而 $\mathfrak{o}$ 是一个主理想整区. 我們知道，$\mathfrak{R}=\{f_1\}\oplus\{f_2\}\oplus\cdots\oplus\{f_t\}$，这里如果阶理想 $\mathfrak{Z}_{f_i}=(\delta_i)$ $(i=1,2,\cdots,t)$，則

(45) $j>u$ 时 $\delta_j=0$，并且对于所有 $i,j$ 而 $i\leqslant j$ 时 $\delta_i|\delta_j$.

令 $B\in(\mathfrak{R}$ 的 $\mathfrak{o}$-自同态环$)\,\mathfrak{B}$，并且設 $f_iB=g_i\ (i=1,2,\cdots,t)$. 如果 $x$ 是 $\mathfrak{R}$ 的任意元素，則 $x=\sum\xi_if_i$，$\xi_i\in\mathfrak{o}$. 于是，

$$xB=(\sum\xi_if_i)B=\sum(\xi_if_i)B=\sum\xi_i(f_iB)=\sum\xi_ig_i.$$

故 $B$ 完全由它施于 $\mathfrak{R}$ 的生成元素 $f_i$ 的結果所决定. 其次要講的是:因为 $\delta_i f_i = 0$, 故 $\delta_i g_i = \delta_i(f_i B) = (\delta_i f_i)B = 0$. 所以,如果 $(\varepsilon_i)$ 是 $g_i$ 的阶理想,則 $\varepsilon_i | \delta_i$.

反过来, 設对于每个 $i$, $g_i$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个元素, 它的阶理想 $(\varepsilon_i)$ 适合条件 $\varepsilon_i | \delta_i$. 定义 $B$ 是映照 $\sum \xi_i f_i \to \sum \xi_i g_i$,則可断言 $B \in \mathfrak{B}$. 我們先証 $B$ 是单值的. 这因为, 假設 $\sum \xi_i f_i = \sum \eta_i f_i$ 是同一个元素的两种表示, 則 $\sum(\xi_i - \eta_i)f_i = 0$. 故 $\delta_i | (\xi_i - \eta_i)$. 于是, $\varepsilon_i | (\xi_i - \eta_i)$, 并且这可推得 $\sum(\xi_i - \eta_i)g_i = 0$,或 $\sum \xi_i g_i = \sum \eta_i g_i$. 这就証明:由两种表示所得的結果相等. 故 $B$ 是一个 $\mathfrak{o}$-自同态立可驗証了.

我們的結果如次: 元素 $B \in \mathfrak{B}$ 与元素 $g_i$ 的有序集合 $(g_1, g_2, \cdots, g_t)$之間存在有一个 1—1 对应,这里 $g_i$ 的阶理想 $(\varepsilon_i)$ 适合条件 $\varepsilon_i | \delta_i$. 令命 $g_i = \sum \beta_{ij} f_j$, $\beta_{ij} \in \mathfrak{o}$, 并且把元素 $\in \mathfrak{o}$ 的环 $\mathfrak{o}_t$ 里的 $t \times t$ 陣

$$(46) \qquad (\beta) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1t} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{t1} & \beta_{t2} & \cdots & \beta_{tt} \end{bmatrix}$$

与有序集合 $(g_1, g_2, \cdots, g_t)$ 联系起来. 这个陣不是唯一决定的. 这因为,任意的 $\beta_{ij}$ 可用 $\beta'_{ij}$ 来代替,这里 $\beta'_{ij} \equiv \beta_{ij} (\mathrm{mod}\, \delta_j)$. 这是不改变 $g_i$ 所能做的仅有改变. 故我們可說, $(\beta)$ 的 $j$- 列的元素在以 $\delta_j$ 为模数下是确定的. 条件 $\varepsilon_i | \delta_i$ 亦即条件 $\delta_i g_i = 0$ 与方程

$$(47) \qquad \delta_i \beta_{ij} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, \delta_j)$$

等价. 因为(47)的意义是說: 存在着 $\gamma_{ij}$ 使 $\delta_i \beta_{ij} = \gamma_{ij} \delta_j$, 所以(47)与下面关于(46)的陣$(\beta)$的条件等价:存在着一个陣$(\gamma)$使

$$(48) \quad \begin{bmatrix} \delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1t} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{t1} & \beta_{t2} & \cdots & \beta_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1t} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{t1} & \gamma_{t2} & \cdots & \gamma_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_t \end{bmatrix}.$$

适合这个条件的陣 $(\beta)$的全体 $\mathfrak{M}$ 是陣环 $\mathfrak{o}_t$ 的子环. 陣 $(\beta)$

决定 $\mathfrak{B}$ 的一个元素使 $f_iB=\sum\beta_{ij}f_j$. 我們容易驗証:对应$(\beta)\to B$ 是 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{B}$ 之間的一个同态. 但由 $(\beta)$ 所决定的自同态 $B$ 是 $\mathfrak{o}$ 必須而且只須 $\beta_{ij}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \delta_j)$. 所以同态核是陣 $(\nu)$ 的集合 $\mathfrak{N}$,而 $(\nu)$ 的元素 $\nu_{ij}$ 是积 $\mu_{ij}\delta_j$. 故 $B\in\mathfrak{N}$ 必須而且只須在 $\mathfrak{o}_t$ 里存在有一个 $(\mu)$ 使

$$(\nu)=(\mu)(\delta), \tag{49}$$

这里 $(\delta)=\mathrm{diag}\,\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_t\}$. 环 $\mathfrak{B}$ 与差环 $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ 同构.

**定理 18.** 令 $\mathfrak{R}=\{f_1\}\oplus\{f_2\}\oplus\cdots\oplus\{f_t\}$, 这里 $f_i$ 的階理想是 $(\delta_i)$,则 $\mathfrak{R}$ 的 $\mathfrak{o}$- 自同态的环 $\mathfrak{B}$ 与差环 $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ 同构,这里 $\mathfrak{M}$ 是由陣 $(\beta)$ 构成的 $\mathfrak{o}_t$ 的子环, 对于 $(\beta)$ 有一个 $(\gamma)$ 存在使(48)成立,而 $\mathfrak{N}$ 是由陣 $(\nu)$ 构成的理想,对于 $(\nu)$ 有一个 $(\mu)$ 存在使(49)成立.

如果使用关于 $\delta$ 的条件(45),则 $\mathfrak{M}$ 的陣可明白决定. 今列举(47)的下列情形:

1. $i\geqslant j$. 此时 $\delta_i\equiv 0(\mathrm{mod}\ \delta_j)$. 所以这些 $\beta_{ij}$ 是任意的.
2. $i\leqslant u,\ j>u$. 此时由(47)与(45)可推得这些 $\beta_{ij}=0$.
3. $i,j>u$. 此时 $\delta_i=\delta_j=0$,而 $\beta_{ij}$ 是任意的.
4. $i<j\leqslant u$. 此时令 $\eta_{ij}=\delta_i^{-1}\delta_j$, 则 (47) 与条件 $\beta_{ij}\equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ \eta_{ij})$等价.

故$(\beta)$有下面形状:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc}
\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1u} & & & \\
\beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2u} & & 0 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
\beta_{u1} & \beta_{u2} & \cdots & \beta_{uu} & & & \\
\hline
\beta_{u+1,1} & \beta_{u+1,2} & \cdots & \beta_{u+1,u} & \beta_{u+1,u+1} & \cdots & \beta_{u+1,t} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\beta_{t1} & \beta_{t2} & \cdots & \beta_{tu}, & \beta_{t,u+1} & \cdots & \beta_{tt}
\end{array}\right) \tag{50}$$

这里除了在左上角陣块里主对角綫上方的元素外, 其余所有 $\beta$ 都是任意的;此时 $\beta_{ij}=\mu_{ij}\eta_{ij}$, 这里 $\mu_{ij}$ 是任意的,而 $\eta_{ij}=\delta_i^{-1}\delta_j$. 关于这些 $\beta$,条件 $\beta_{ij}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \delta_j)$ 与 $\mu_{ij}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \delta_i)$ 等价.

**17. 与給定的綫性变换可交换的綫性变换** 今把 $\mathfrak{R}$ 特殊化，取为由綫性变换 $A$ 所决定的 $\Phi[\lambda]$-模. 此时，每个 $\delta_i \neq 0$，故 $u = t$. 环 $\mathfrak{M}$ 由所有陣 $(\beta)$ 組成，而在 $(\beta)$ 里如果 $i \geqslant j$，則 $\beta_{ij}$ 是任意元素；但在 $i < j$ 时則 $\beta_{ij} = \mu_{ij}\eta_{ij}$，而 $\eta_{ij} = \delta_i^{-1}\delta_j$. 任意一个 $\beta_{ij}$ 都可以用同一陪集 $(\mathrm{mod}\ \delta_j)$ 里的 $\beta'_{ij}$ 代替. 故 $\mu_{ij}$ 可以用同一陪集 $(\mathrm{mod}\ \delta_i)$ 里的 $\mu'_{ij}$ 代替. 于是，如果 $n_i = \deg\delta_i$，則可設

$$i \geqslant j \text{ 时 } \deg \beta_{ij} < n_j,$$
$$i < j \text{ 时 } \deg \mu_{ij} < n_i.$$

$\mathfrak{M}$ 里适合这些条件的陣叫做正規化陣. 显然两个正規化陣能决定 o- 自同态环 $\mathfrak{B}$ 里的同一 $B$ 必須而且只須它們是全同的. 所以上面决定的对应 $(B) \to B$ 是正規化陣集合 $\mathfrak{U}$ 与环 $\mathfrak{B}$ 之間的 1—1 对应.

我們知道，$\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A} = \Phi_l[A] \supseteq \Phi_l$；故 $\mathfrak{B}$ 是 $\Phi$ 上向量空間 $\mathfrak{L}$ 的一个子空間. 今将計算 $\Phi$ 上向量空間 $\mathfrak{B}$ 的維数.

首先要講的是：与純量乘法对应的正規化陣是 $t$ 行及 $t$ 列的純量陣 $\alpha 1 = \mathrm{diag}\,\{\alpha, \alpha, \cdots, \alpha\}$，这因为我們有关系 $f_i\alpha_l = \alpha f_i$. 再則正規化陣的集合 $\mathfrak{U}$ 在加法及用純量陣作乘法下显然是封閉的. 故 $\mathfrak{U}$ 可看作是 $\Phi$ 上一个向量空間. 此时对于 $(\beta) \in \mathfrak{U}$，定义 $\alpha(\beta)$ 为陣 $\alpha 1(\beta)$. 如果 $B_i \in \mathfrak{B}(i = 1, 2)$，而 $B_i \to (\beta_i) \in \mathfrak{U}$，則显然有 $B_1 + B_2 \to (\beta_1) + (\beta_2)$ 及 $\alpha B_1 \to \alpha(\beta_1)$. 因为这个对应是 1—1 的，这証明了 $\Phi$ 上空間 $\mathfrak{B}$ 与 $\Phi$ 上空間 $\mathfrak{U}$ 等价. 今决定 $\mathfrak{U}$ 的維数.

令 $\mathfrak{U}_{ij}$ 表示滿足 $(k, l) \neq (i, j)$ 則 $\beta_{kl} = 0$ 的所有正規化陣构成的集合，$\mathfrak{U}_{ij}$ 是空間 $\mathfrak{U}$ 的子空間. 我們易知，如果 $i \geqslant j$，則次数 $< n_j$ 的多項式空間的維数 $\dim \mathfrak{U}_{ij}$ 是 $n_j$. 同理，如果 $i < j$，則 $\dim \mathfrak{U}_{ij} = n_i$. 因为 $\mathfrak{U}$ 是子空間 $\mathfrak{U}_{ij}$ 的直接和，

$$\dim \mathfrak{U} = \sum_{j=1}^{t}(t-j+1)n_j + \sum_{i=1}^{t-1}(t-i)n_i = \sum_{j=1}^{t}(2t-2j+1)n_j.$$

这証明了下面的定理.

**定理 19.** (福路本紐斯). 令 $(\alpha) \in \Phi_n$，并令 $\delta_1(\lambda), \delta_2(\lambda), \cdots,$

$\delta_t(\lambda)$ 是 $\lambda 1-(\alpha)$ 里 $\neq 1$ 的不變因子. 如果 $\delta_i(\lambda)$ 的次數是 $n_i$, 則与 $(\alpha)$ 可交換的綫性无關陣的最大个數是

$$N=\sum_{j=1}^{t}(2t-2j+1)n_j.$$

如果 $t>1$, 则显然 $N>\sum_{j=1}^{t}n_j=n>n_t$. 因为 $\Phi_l$ 上向量空間 $\mathfrak{A}=\Phi_l[A]$ 的維数是 $n_t$, 这証明了: 在此种情形下 $\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A}$. 如果回忆到 $t=1$ 是 $A$ 为循环变换的条件, 则得下面关于定理 17 的系的逆定理.

**系.** 如果 $A$ 是一个非循环的綫性变換, 則存在有不是 $A$ 的多項式, 而能与 $A$ 交換的綫性变換.

**例** 令

$$(\alpha)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&2\end{bmatrix}.$$

此时, 如果 $A$ 是对应的綫性变換, 則 $\mathfrak{R}=\{f_1\}\oplus\{f_2\}$. 不变因子是 $\delta_1=\lambda-1$ 及 $\delta_2=(\lambda-1)^2$. 正規化陣 $(\beta)$ 的一般形状是

$$\begin{bmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}(\lambda-1)\\\beta_{21}&\beta_{22}+\beta'_{22}\lambda\end{bmatrix}.$$

因为 $\lambda f_1=f_1$, 及 $\lambda^2f_2=(2\lambda-1)f_2=-f_2+2(\lambda f_2)$,

$$f_1B=\beta_{11}f_1-\beta_{12}f_2+\beta_{12}(\lambda f_2),$$
$$f_2B=\beta_{21}f_1+\beta_{22}f_2+\beta'_{22}(\lambda f_2),$$
$$(\lambda f_2)B=\beta_{21}f_1-\beta'_{22}f_2+(\beta_{22}+2\beta'_{22})(\lambda f_2).$$

所以, 与 $(\alpha)$ 可交換的陣的一般形状是

$$\begin{bmatrix}\beta_{11}&-\beta_{12}&\beta_{12}\\\beta_{21}&\beta_{22}&\beta'_{22}\\\beta_{21}&-\beta_{22}&\beta_{22}+2\beta'_{22}\end{bmatrix}.$$

## 習 題 30

1. 令 $\mathfrak{R}$ 是一个有限交換羣, 并設 $\mathfrak{R}$ 是 $n_1, n_2, \cdots, n_t$ 阶的循环羣的直接和, 这里 $i\leqslant j$ 时 $n_i|n_j$. 証明: $\mathfrak{R}$ 的自同态环里元素的个数是

$$N=\prod_{j=1}^{t}n_j^{2t-2j+1}.$$

2. 决定与

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

可交换的陣。

3. 决定与

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

可交换的陣。

**18. 环 $\mathfrak{B}$ 的心** 今就 $\mathfrak{R}$ 是一个有限生成的 $\mathfrak{o}$-模来考虑，这里 $\mathfrak{o}$ 是主理想整区。与前一样，令 $\mathfrak{R}=\{f_1\}\oplus\{f_2\}\oplus\cdots\oplus\{f_t\}$，这里阶理想 $(\delta_i)$ 适合(45)。今証下面的定理。

**定理 20.** $\mathfrak{R}$ 的 $\mathfrak{o}$-自同態環的心由純量乘法組成.

令 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{o}$-自同态环，$\mathfrak{C}$ 是它的心，而 $\mathfrak{o}_l$ 是純量乘法 $x\rightarrow\alpha x$ 的环。我們已知 $\mathfrak{o}_l\subseteq\mathfrak{C}$。今令 $C$ 是 $\mathfrak{C}$ 的任意元素；令 $E_k(k=1,2,\cdots,t)$ 是 $\mathfrak{o}$-自同态，使 $f_jE_k=\delta_{jk}f_k\,(j=1,2,\cdots,t)$。由 § 16 的論述知，这样的自同态在 $\mathfrak{B}$ 里存在。还存在有使 $f_jE_{tk}=\delta_{jt}f_k$ 的 $\mathfrak{o}$-自同态 $E_{tk}$。因为 $C$ 与这些自同态可交换，故得下面的方程：

$$f_tC=(f_tE_t)C=(f_tC)E_t=\gamma f_t,\quad \gamma\in\sigma,$$

$$f_kC=(f_tE_{tk})C=(f_tC)E_{tk}=(\gamma f_t)E_{tk}=\gamma(f_tE_{tk})=\gamma f_k.$$

故 $C$ 与映照 $x\rightarrow\gamma x$ 重合。所以 $\mathfrak{C}=\mathfrak{o}_l$。

如果 $C$ 是 $\mathfrak{R}$ 里可与 $\mathfrak{B}$ 的每个元素交換的任意自同态，则 $C$ 特別可与 $\mathfrak{o}_l$ 的每个元素交换．故 $C\in\mathfrak{B}$。于是 $C$ 在 $\mathfrak{B}$ 的心里。逆定理是显然的。这个說明使我們能够把定理 20 用下面另一种形式述出：

**定理 20′.** $\mathfrak{R}$ 里能与每个 $\mathfrak{o}$-自同態交換的僅有自同態是純量乘法.

这定理可特殊化为

**系 1.** 如果 $C$ 是一个綫性變換，它与每个能夠与 $A$ 可交換的綫性變換都可交換，則 $C$ 是含 $A$ 的一个多項式.

这个系使我們能够决定整个綫性变换环 $\mathfrak{L}$ 的心．这因为，令 $A=1$，则与 $A$ 可交换的綫性变换的环 $\mathfrak{B}$ 是整个环 $\mathfrak{L}$。于是，系 1 指出：与每个綫性变换可交换的仅有綫性变换是含 1 的多項

式. 因为綫性变换能够用含 1 的多項式表达必須而且只須它是純量乘法,这就給出重要的

**系 2.** 域 $\Phi$ 上向量空間的綫性變換的環的心是純量乘法的集合 $\Phi_l$.

这个結果的更直接的証明見后面第八章, § 2.

## 習 題 31

1. 証明: 有限羣的自同态环的心是由自同态 $x \to mx$ 組成, 这里 $m$ 是一个整数.

2. 証明: 綫性变换 $A$ 是循环的必須而且只須与 $A$ 可交换的綫性变换的环 $\mathfrak{B}$ 是交换环.

3. 証明下面关于定理 20′ 的推广: $\mathfrak{R}$ 里与每个同势的 o-自同态可交换的自同态只能是純量乘法.

# 第 四 章

## 綫性变换的集合

我們将在这一章里引进某些一般概念，它們在研究任意綫性变换集合是基本概念. 深入的討論应該属于所謂环表示論，不在本书范围內；但引进这些概念的大意会使本章的結果得到更好的了解. 我們还能够把这些結果中一部分推广到可交換的綫性变换的集合.

**1. 不变子空間** 本章里大部分是論述关于可除环 $\Delta$ 上向量空間的一般情形. 令 $\mathfrak{R}$ 是 $\Delta$ 上有限維向量空間，并且令 $\Omega$ 是 $\Delta$ 上空間 $\mathfrak{R}$ 里的綫性变换的一个集合. 如果 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基，而 $A\in\Omega$，則 $e_iA=\sum\alpha_{ij}e_j$，而 $(\alpha)$ 是 $A$ 关于給定的基的陣. 由 $A\in\Omega$ 按这样方法决定的陣 $(\alpha)$ 构成一个集合 $\omega$，叫做 $\Omega$ 关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣集合. 如果 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是另一个基，而 $f_i=\sum\mu_{ij}e_j$，則 $\Omega$ 关于这个新基的陣集合是集合 $\{(\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}\}$，这里 $(\alpha)\in\omega$. 这个集合記作 $(\mu)\omega(\mu)^{-1}$.

从几何观点来說，綫性变换集合的研究里一个基本問題是决定关于这个集合的不变子空間問題. 也象在单一綫性变换情形，如果 $\mathfrak{S}$ 是子空間，而对于每个 $A\in\Omega$ 有 $\mathfrak{S}A\subseteq\mathfrak{S}$，則 $\mathfrak{S}$ 叫做在 $\Omega$ 下不变. 如果 $\Omega$ 由一个单一綫性变换构成，則循环子空間 $\{x\}$ 就是不变子空間的例子. 下面是其它簡单的例子.

1. $\Omega$ 由綫性变换 0 組成. 因为对于任意的 $\mathfrak{S}$，$\mathfrak{S}0=0\subseteq\mathfrak{S}$，所以此时任意一个子空間都是不变的.

2. $\Omega$ 是整个綫性变换集合 $\mathfrak{L}$. 此时零空間 0 及全空間 $\mathfrak{R}$ 是仅有的不变子空間. 令 $\mathfrak{S}$ 是非零不变子空間，并令 $y$ 是 $\mathfrak{S}$ 里非零向量. 如果 $x$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意向量，則有一个綫性变换 $A$ 存在使

$yA = x$. 因为 $\mathfrak{S}$ 是不变的，故 $x = yA \in \mathfrak{S}A \subseteq \mathfrak{S}$. 于是，$x \in \mathfrak{S}$；但因为 $x$ 是任意的，故 $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$.

全空間 $\mathfrak{R}$ 关于任意集合 $\Omega$ 显然是一个不变子空間. 因为对于任意綫性变换 $A$ 有 $0A = 0$，故零空間 0 是不变子空間. 上面第二个例指出：有集合 $\Omega$ 存在使这两个"当然"子空間对于 $\Omega$ 是仅有的不变子空間. 这样的集合叫做一个**不可約集合**. 为着方便，有时也說：$\mathfrak{R}$ 是**关于集合 $\Omega$ 不可約的**.

可約性，或眞的（$\neq 0$, $\neq \mathfrak{R}$）不变子空間的存在可以用 $\Omega$ 的陣集合的一个簡单条件来說明. 設 $\mathfrak{S}$ 是一个眞不变子空間，并令 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基，使 $(f_1, f_2, \cdots, f_r)$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个基. 因为 $\mathfrak{S}$ 是不变的，故对于每个 $A \in \Omega$, $f_iA \in \mathfrak{S}(i = 1, 2, \cdots, r)$. 于是，給出 $A$ 关于 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 的关系是

$$(1)\qquad \begin{aligned} f_iA &= \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij} f_j \quad (i = 1, 2, \cdots, r) \\ f_kA &= \sum_{l=1}^{n} \beta_{kl} f_l \quad (k = r+1, r+2, \cdots, n). \end{aligned}$$

所以 $A$ 的陣 $(\beta)$ 的形状是

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \cdots & \beta_{rr} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{r+1,1} & \beta_{r+1,2} & \cdots & \beta_{r+1,r} & \beta_{r+1,r+1} & \beta_{r+1,r+2} & \cdots & \beta_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nr} & \beta_{n,r+1} & \beta_{n,r+2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

一个陣有一个 $r \times (n - r)$ 陣块元素全为 0 的在右上角时，这样的陣称为有**既約形式**. 所以，一个眞不变子空間的存在可推知有一个基存在，对于这个基，$\Omega$ 的陣都有既約形式. 另一种的說明是：如果 $\omega$ 是 $\Omega$ 关于某个基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣集合，則眞不变子空間的存在可推知：存在有一个滿秩陣 $(\mu)$ 使 $(\mu)\omega(\mu)^{-1}$ 的所有陣有相同的既約形式（亦即全体有同一的 $r$）.

逆定理也是成立的. 这因为,設 $(\mu)\omega(\mu)^{-1}$ 的所有陣具既約形式(2). 如果 $f_i=\sum\mu_{ij}e_j$, 則 $\Omega$ 关于 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 的陣組成集合 $(\mu)\omega(\mu)^{-1}$. 由于这些陣的形状知关系(1)成立,并且这些关系指出空間 $\mathfrak{S}=[f_1, f_2, \cdots, f_r]$ 在 $\Omega$ 下不变.

### 習 題 32

1. 令 $\Omega$ 是一个綫性变换集合,并令 $B$ 是与每个 $A\in\Omega$ 可交换的一个綫性变换. 証明:如果 $\mathfrak{S}$ 是关于 $\Omega$ 的不变子空間,則 $\mathfrak{S}B$ 也是不变的. 証明:使 $yB=0$ 的向量 $y\in\mathfrak{S}$ 的子集合 $\mathfrak{N}$ 关于 $\Omega$ 也是不变的.

2. 証明:一个子空間 $\mathfrak{S}$ 关于一个集合 $\Omega$ 是不变的必須而且只須下面的算子条件成立:对于到 $\mathfrak{S}$ 上的每个射影 $E$ 及每个 $A\in\Omega$,关系 $EAE=EA$ 成立.

**2. 誘导綫性变换** 如果 $\mathfrak{S}$ 是一个子空間,在 $\Omega$ 下不变,則綫性变换 $A\in\Omega$ 在 $\mathfrak{S}$ 里誘导出变换. 显然这些变换都是綫性的. 今将証明:在一定意义下,$A\in\Omega$ 在商空間 $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ 里也誘导出綫性变换. 我們知道,$\bar{\mathfrak{R}}$ 的向量 $\bar{x}$ 是由形状如 $x+y$ 的向量組成的一个陪集,这里 $x$ 是固定的,而 $y$ 遍历 $\mathfrak{S}$. 如果 $A\in\Omega$,則 $(x+y)A=xA+yA=xA+y'$,这里 $y'=yA\in\mathfrak{S}$. 所以,陪集 $\bar{x}$ 里任意向量的象是由 $xA$ 决定的陪集 $\overline{xA}$ 里一个向量. 故联系 $\bar{x}$ 与 $\bar{\mathfrak{R}}$ 里向量 $\overline{xA}$ 的映照 $\bar{A}$ 是单值的. 我們把 $\bar{A}$ 叫做 $A$ 在 $\bar{\mathfrak{R}}$ 里誘导出的变换. 因为

$$(\bar{x}_1+\bar{x}_2)\bar{A}=\overline{(x_1+x_2)}\bar{A}=\overline{((x_1+x_2)A)}$$
$$=\overline{(x_1A+x_2A)}=\overline{(x_1A)}+\overline{(x_2A)}=\bar{x}_1\bar{A}+\bar{x}_2\bar{A},$$

及

$$(\alpha\bar{x})\bar{A}=\overline{(\alpha x)}\bar{A}=\overline{((\alpha x)A)}=\overline{(\alpha(xA))}=\alpha(\overline{xA})=\alpha(\bar{x}\bar{A}),$$

所以,这个映照是綫性的. 在沒有混淆的危险时,为着簡单起見,我們也用 $A$ 表示 $A$ 的誘导变换.

另一方面,有时需要小心地在变换 $A$ 与 $\bar{A}$ 之間加以区别. 它們之間的精确关系可按下面方法使之明确.

考虑 $\mathfrak{R}$ 到 $\bar{\mathfrak{R}}$ 上的映照 $P: x\to\bar{x}=x+\mathfrak{S}$. 由 $\bar{\mathfrak{R}}$ 里合成的定义立知:$P$ 是 $\mathfrak{R}$ 到 $\bar{\mathfrak{R}}$ 上的一个綫性变换. 我們叫 $P$ 做 $\mathfrak{R}$ 到 $\bar{\mathfrak{R}}$ 上的**自然映照**. 現在,我們定义 $\bar{A}$ 为 $\bar{x}\bar{A}=\overline{xA}$,則有关系 $P\bar{A}=AP$ 結合 $A$ 与 $\bar{A}$.

設按前节方法选取基 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 使 $(f_1, f_2, \cdots, f_r)$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个基，则由(1)里第一組关系显然知，陣

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1r} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \cdots & \beta_{rr} \end{bmatrix}$$

是 $A$ 在不变子空間 $\mathfrak{S}$ 里誘导出的綫性变換的陣．再則，由(1)里第二組方程得

$$\bar{f}_k\bar{A} = \overline{(f_kA)} = \left(\overline{\sum_1^n \beta_{kl}f_l}\right) = \sum_1^n \beta_{kl}\bar{f}_l = \sum_{r+1}^n \beta_{kl}\bar{f}_l.$$

今知向量 $(\bar{f}_{r+1}, \bar{f}_{r+2}, \cdots, \bar{f}_n)$ 构成 $\bar{\mathfrak{R}}$ 的一个基，故这些关系指出：$\bar{A}$ 关于这个基的陣是(2)里右下角上的陣块

$$\begin{bmatrix} \beta_{r+1,\,r+1} & \cdots & \beta_{r+1,\,n} \\ \beta_{r+2,\,r+1} & \cdots & \beta_{r+2,\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n,\,r+1} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix}.$$

至此，我們对于出現在(2)里的两个对角綫上陣块得到了解释．我們自然要問出現在(2)里的左下角那个余下的陣块的意义．要获得这一个陣块的意义，首先注意到 $[f_{r+1}, \cdots, f_n]$ 是空間 $\mathfrak{S}$ 的余空間 $\mathfrak{U}$．分解 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{U}$ 决定 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{S}$ 上的一个射影 $E$．因为 $\mathfrak{S}$ 关于 $\Omega$ 是不变的，故对于每个 $A \in \Omega$, $EAE = EA$ 成立(习題32的第2題)．今考虑綫性变換 $AE - EA = AE - EAE$；这个变換把 $\mathfrak{R}$ 映到 $\mathfrak{S}$ 内．再则，如果 $y \in \mathfrak{S}$, $y(AE - EA) = yA - yA = 0$．由此可見 $AE - EA$ 决定 $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{S}$ 内的一个綫性变換 $A_E$．故定义

$$\bar{x}A_E = x(AE - EA),$$

而由上面的說明可見 $A_E$ 是单值的．我們直接驗証：$A_E$ 是 $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{S}$ 内的一个綫性变換．由定义我們还得关系 $AE - EA = PA_E$．

今将証明：陣

$$\begin{bmatrix} \beta_{r+1,1} & \cdots & \beta_{r+1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n,1} & \cdots & \beta_{n,r} \end{bmatrix}$$

是 $A_E$ 关于 $\bar{\mathfrak{R}}$ 的基 $(\bar{f}_{r+1}, \cdots, \bar{f}_n)$ 及 $\mathfrak{S}$ 的基 $(f_1, \cdots, f_r)$ 的陣. 故得关系

$$\bar{f}_k A_E = f_k(AE - EA) = f_k AE$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \beta_{ki} f_i \quad (k = r+1, \cdots, n),$$

这証明了我們的論断.

### 習　題　33

1. 証明: 象 $A + B = C$ 或 $AB = C$ $(A, B, C \in \Omega)$ 的关系可推出 $\bar{\mathfrak{R}}$ 里关于誘导綫性变换的对应关系 $\bar{A} + \bar{B} = \bar{C}$, 或 $\bar{A}\bar{B} = \bar{C}$.

2. 証明: $A$ 在 $\mathfrak{R}$ 里是1—1的必須而且只須 $A$ 在 $\mathfrak{S}$ 里是1—1的, 并且 $\bar{A}$ 在 $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ 里是1—1的.

**3. 合成空間列**　令 $\mathfrak{S}$ 与 $\mathfrak{U}$ 是不变子空間, 适合 $\mathfrak{R} \supseteq \mathfrak{U} \supseteq \mathfrak{S}$, 则 $\bar{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}/\mathfrak{S}$ 是 $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ 的一个子空間. 如果 $\bar{u} \in \bar{\mathfrak{U}}$, 則 $\bar{u} = u + \mathfrak{S}$, 这里 $u \in \mathfrak{U}$. 于是, 对于 $\Omega$ 里任意的 $A$ 有 $\bar{u}\bar{A} = \overline{uA} \in \bar{\mathfrak{U}}$. 这証明: $\bar{\mathfrak{U}}$ 关于 $\bar{\mathfrak{R}}$ 里誘导綫性变换 $\bar{A}$ 的集合 $\bar{\Omega}$ 是不变的.

今将証逆定理也成立, 亦即 $\bar{\mathfrak{R}}$ 的任意不变子空間的形状是 $\bar{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}/\mathfrak{S}$, 这里 $\mathfrak{U}$ 是 $\mathfrak{R}$ 里含有 $\mathfrak{S}$ 的一个不变子空間. 故令 $\bar{\mathfrak{U}}$ 是 $\bar{\mathfrak{R}}$ 里关于 $\bar{\Omega}$ 不变的子空間, 令 $\mathfrak{U}$ 是含在属于 $\bar{\mathfrak{U}}$ 的各陪集里向量的全体. 如果 $u_1$ 与 $u_2 \in \mathfrak{U}$, 則 $\bar{u}_1 = u_1 + \mathfrak{S}$ 与 $\bar{u}_2 = u_2 + \mathfrak{S}$ 都 $\in \bar{\mathfrak{U}}$. 于是, $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = (u_1 + u_2) + \mathfrak{S} \in \bar{\mathfrak{U}}$. 故 $u_1 + u_2 \in \mathfrak{U}$. 同理, 当任意 $\alpha \in \Delta$ 及任意 $u \in \mathfrak{U}$ 时, 有 $\alpha u \in \mathfrak{U}$. 因为 $(u + \mathfrak{S})\bar{A} = uA + \mathfrak{S} \in \bar{\mathfrak{U}}$, 故 $uA \in \mathfrak{U}$. 于是, $\mathfrak{U}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个不变子空間. 显然, $\bar{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}/\mathfrak{S}$.

設有适合

$$(3) \qquad 0 \subset \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{S}_t = \mathfrak{R}$$

的一个不变子空間序列, 如果每个 $\mathfrak{S}_i$ 是 $\mathfrak{S}_{i-1}$ 上不可約, 就是說, $\mathfrak{S}_i$ 与 $\mathfrak{S}_{i-1}$ 間不存在适合 $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}' \supset \mathfrak{S}_{i-1}$ 的不变子空間 $\mathfrak{S}'$, 則这个序列叫做 $\mathfrak{R}$ 关于 $\Omega$ 的**合成空間列**. 由已証的結果显見, $\mathfrak{S}_i$ 是 $\mathfrak{S}_{i-1}$ 上不可約的必須而且只須 $\mathfrak{S}_i/\mathfrak{S}_{i-1}$ 关于由 $A \in \Omega$ 誘导的綫性

变换集合是不可約的．不可約空間

$$(4) \qquad \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2/\mathfrak{S}_1, \cdots, \mathfrak{S}_t/\mathfrak{S}_{t-1}$$

叫做合成空間列(3)的**合成因子**.

今选取 $\mathfrak{S}_1$ 的一个基 $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_1})$. 則它可扩充为 $\mathfrak{S}_2$ 的一个基 $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_1+n_2})$; 这样継續下去，最后得 $\mathfrak{R}$ 的一个基 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 使 $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_1+n_2+\cdots+n_i})$ 是 $\mathfrak{S}_i$ 的一个基．如果 $A \in \Omega$,則

$$(5) \qquad \begin{aligned} f_iA &= \sum_1^{n_1} \beta_{ij}f_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n_1), \\ f_kA &= \sum_1^{n_1+n_2} \beta_{kl}f_l \quad (k = n_1 + 1, \cdots, n_1 + n_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_pA &= \sum_1^{n_1+n_2+\cdots+n_t} \beta_{pq}f_q \quad (p = n_1 + \cdots + n_{t-1} + 1, \\ &\qquad \cdots, n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n). \end{aligned}$$

故 $A$ 关于这个基的陣的形状是

$$(6) \qquad \begin{bmatrix} (\beta_1) & & & 0 \\ * & (\beta_2) & & \\ & & \ddots & \\ * & * & \cdots & (\beta_t) \end{bmatrix},$$

这里在主对角綫上各“陣块”都是0．陪集 $(\bar{f}_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1}, \bar{f}_{n_1+\cdots+n_{i-1}+2}, \cdots, \bar{f}_{n_1+\cdots+n_i})$ 构成商空間 $\mathfrak{S}_i/\mathfrak{S}_{i-1}$ 的一个基，并且如果 $\bar{A}$ 表示 $A$ 在商空間 $\mathfrak{S}_i/\mathfrak{S}_{i-1}$ 里所誘导的变换,則由(5)得

$$\bar{f}_r\bar{A} = \sum_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1}^{n_1+\cdots+n_i} \beta_{rs}\bar{f}_s.$$

所以 $\bar{A}$ 关于这个基的陣是由出現于(6)里的对角陣块 $(\beta_i)$．对于 $\mathfrak{S}_i$ 是 $\mathfrak{S}_{i-1}$ 上不可約的这一假定就意味着：要找一个陣 $(\mu_i)$ 使所有陣 $(\mu_i)(\beta_i)(\mu_i)^{-1}$ 都具相同的旣約形式是不可能的.

对于任意集合 $\Omega$ 要証合成空間列的存在是不难的．首先,如果 $\mathfrak{R}$ 是不可約的,則 $0 \subset \mathfrak{R}$ 就是这样的一个合成空間列．否則,令 $\mathfrak{S}$

是一个真不变子空間；如果 $\mathfrak{S}$ 关于誘导的綫性变换的集合是不可約的，則取 $\mathfrak{S}_1=\mathfrak{S}$. 否則，令 $\mathfrak{S}'$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个真不变子空間，則 $\dim\mathfrak{R}>\dim\mathfrak{S}>\dim\mathfrak{S}'$. 所以，这个方法不能无限制地継續进行下去．最終一定得到一个不可約的不变子空間 $\mathfrak{S}_1\neq 0$. 对于 $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{S}_1$ 及誘导变换的集合 $\bar{\Omega}$ 重复这个論証；可見，如果 $\bar{\mathfrak{R}}\neq 0$（亦即 $\mathfrak{R}\neq\mathfrak{S}_1$），則 $\bar{\mathfrak{R}}$ 含有一个不可約的不变子空間 $\bar{\mathfrak{S}}_2\neq 0$. 这个空間的形状为 $\mathfrak{S}_2/\mathfrak{S}_1$，而 $\mathfrak{S}_2$ 关于 $\Omega$ 是不变的，并且是 $\mathfrak{S}_1$ 上不可約的．次考虑 $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}_2$. 如果这个空間 $\neq 0$，則由同样方法可得，关于 $\Omega$ 不变的子空間 $\mathfrak{S}_3$ 是 $\mathfrak{S}_2$ 上不可約的．因为 $\dim\mathfrak{S}_1<\dim\mathfrak{S}_2<\dim\mathfrak{S}_3<\cdots$，这个方法进行到譬如説 $t$ 阶段，就要达到 $\mathfrak{R}$ 而終止．于是，$0\subset\mathfrak{S}_1\subset\mathfrak{S}_2\subset\cdots\subset\mathfrak{S}_t=\mathfrak{R}$ 是一个合成空間列.

**4. 綫性变换集合的可分解性** 設 $\mathfrak{R}_i$ 是关于 $\Omega$ 不变的子空間，今考虑空間 $\mathfrak{R}$ 分解为子空間 $\mathfrak{R}_i$ 的直接和

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\oplus\mathfrak{R}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}_s. \tag{7}$$

如果每个 $\mathfrak{R}_i\neq 0$，并且 $s>1$，則这样的分解叫做**真分解**．如果 $\mathfrak{R}$ 有一个真分解，我們説 $\mathfrak{R}$ 是**关于** $\Omega$ **可分解的**，而説 $\Omega$ 是綫性变换的一个**可分解集合**.

一个綫性变换集合是不可約时，显然是不可分解的．但另一方面也存在着可約而不可分解的集合．所以，可分解性的条件比可約性的条件更强．今用例来証明这个論断.

**例** 令 $\Omega$ 由綫性变换 $A$ 构成，$A$ 关于基 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 的陣是

$$\begin{bmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & 1 & 0\end{bmatrix},$$

則 $e_1A=0$，而 $i>1$ 时 $e_iA=e_{i-1}$. 所以，子空間 $\mathfrak{S}_i=[e_1,e_2,\cdots,e_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是不变子空間．今將証明：只有这些子空間是关于 $A$ 的非零不变子空間．这因为，令 $\mathfrak{S}$ 是这样的一个子空間，令 $h$ 是能使 $\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{S}_h$ 的最小正整数，則 $\mathfrak{S}$ 含有向量

$$\gamma_1e_1+\gamma_2e_2+\cdots+\gamma_he_h,$$

这里 $\gamma_h\neq 0$. 我們可假定 $\gamma_h=1$，于是

$$y=\gamma_1e_1+\gamma_2e_2+\cdots+\gamma_{h-1}e_{h-1}+e_h\in\mathfrak{S}.$$

故向量

$$yA = \gamma_2 e_1 + \cdots + \gamma_{h-1} e_{h-2} + e_{h-1}$$
$$y_2 A = \gamma_3 e_1 + \cdots + \gamma_{h-1} e_{h-3} + e_{h-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

都 $\in \mathfrak{S}$. 显然 $e_1, e_2, \cdots, e_h$ 与这些向量綫性相关，因此 $\mathfrak{S}_h \subseteq \mathfrak{S}$；从而 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_h$. 如果 $i < j$,则因为 $\mathfrak{S}_i \subset \mathfrak{S}_j$,显然这些空間中沒有两个是无关的. 所以，$\mathfrak{R}$ 不能写为这些不变子空間的直接和.

如果 $\mathfrak{R}$ 是不变子空間 $\mathfrak{R}_i(i = 1, 2, \cdots, s; s \geqslant 1)$的直接和，则可选 $\mathfrak{R}$ 的一个基 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 使

$$(8) \qquad (f_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1}, f_{n_1+\cdots+n_{i-1}+2}, \cdots, f_{n_1+\cdots+n_i})$$

是 $\mathfrak{R}_i$ 的一个基. 因为 $\mathfrak{R}_i$ 是不变的，(8) 里任意向量通过任意 $A \in \Omega$ 变为这些向量的綫性組合,所以 $A$ 的陣的形状是

$$(9) \qquad \begin{bmatrix} (\beta_1) & & & \\ & (\beta_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\beta_s) \end{bmatrix}.$$

这里对角陣块是 $A$ 在 $\mathfrak{R}_i$ 里的誘导变换关于基(8)的陣. 反过来，如果 $\Omega$ 是任意的綫性变换集合，并且有一个基 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 存在使 $\Omega$ 里变换关于这个基的陣的形状是(9)，则 $\mathfrak{R}$ 是不变子空間

$$\mathfrak{R}_i = [f_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1}, \cdots, f_{n_1+\cdots+n_i}]$$

的直接和.

今設 $E_i(i = 1, 2, \cdots, s)$ 是由这样分解所决定的射影. 如果

$$(10) \qquad x = x_1 + x_2 + \cdots + x_s,$$

这里 $x_i \in \mathfrak{R}_i$，则知 $E_i$ 是映照 $x \to x_i$. 我們还知道（第二章，§ 13）下列关系成立:

$$(11) \quad E_i^2 = E_i, \ E_i E_j = 0 (i \neq j), \ E_1 + E_2 + \cdots + E_s = 1.$$

空間 $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}E_i$,所以每个 $E_i \neq 0$. 今令 $A \in \Omega$,则

$$xA = x_1 A + x_2 A + \cdots + x_s A,$$

并且因为 $\mathfrak{R}_i$ 是不变子空間,故 $x_i A \in \mathfrak{R}_i$. 所以，$xA$ 在 $\mathfrak{R}_i$ 里的分量是 $x_i A$,或

$$(12) \qquad xAE_i = x_i A = xE_i A.$$

这証明:射影 $E_i$ 与每个 $A \in \Omega$ 可交换. 反过来，設 $E_i$ 是适合(11)

的非零綫性变换，并且与每个 $A \in \Omega$ 可交换，则知 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_s$，这里 $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}E_i$. 如果 $A \in \Omega$，而 $x_i \in \mathfrak{R}_i$，则还有 $x_i = xE_i$ 及 $x_iA = xE_iA = (xA)E_i \in \mathfrak{R}_i$. 所以，$\mathfrak{R}_i$ 关于 $\Omega$ 是不变子空間.

如果在討論里 $s > 1$，则每个 $\mathfrak{R}_i$ 是一个眞子空間，并且每个 $E_i \neq 1$. 故知，如果 $\Omega$ 是綫性变换的可分解集合，则存在有射影 $\neq 0, \neq 1$，而与 $\Omega$ 里每个 $A$ 可交换. 反过来，如果 $E_1$ 是射影 $\neq 0, \neq 1$，而与 $\Omega$ 里每个 $A$ 可交换，则 $E_2 = 1 - E_1$ 也有这些性質. 再则，$E_1$ 与 $E_2$ 是正交的，所以 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}E_1 \oplus \mathfrak{R}E_2$ 及 $\mathfrak{R}E_i$ 是眞不变子空間. 这就証明了下面重要的判断准則：

**定理 1.** 一个綫性变换集合 $\Omega$ 是可分解的，必須而且只須存在有射影 $E \neq 0, \neq 1$，而与 $\Omega$ 里每个变换可交换.

### 习 題 34

1. 証明：如果 $\mathfrak{R}$ 关于 $\Omega$ 的一个子集合是不可約的（不可分解的），则它关于 $\Omega$ 是不可約的（不可分解的）. 应用这个結果証明：与三角陣

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

的集合对应的綫性变换集合是一个不可分解集合.

## 5. 完全可約性

**5. 完全可約性** 如果 $\mathfrak{S}_1$ 与 $\mathfrak{S}_2$ 是 $\Omega$ 下不变子空間，则 $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$ 与 $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$ 也是 $\Omega$ 下不变子空間. 所以，不变子空間的全体是 $\mathfrak{R}$ 的子空間的完全格 $L$ 的一个子格 $L_\Omega$. 在討論集合 $L_\Omega$ 时自然可应用格論上的观念；事实上，前此討論中就是这样做. 故 $\Omega$ 是不可約的等于說 $L_\Omega$ 只含有两个元素. $\Omega$ 是不可分解的說法也可写成格 $L_\Omega$ 的性質. 在第一章列出的 $L$ 的性質里，鏈条件及狄得京得法則在子格 $L_\Omega$ 里显然保持有效；但 $L$ 的相余性質在 $L_\Omega$ 里不一定成立. 如果 $\Omega$ 只由恆等变换 1 构成，此时 $L_\Omega = L$，则这个性質在 $L_\Omega$ 里就一定成立. 如果 $\Omega$ 是不可約的，则 $L_\Omega$ 也是有余格；并且后面还会遇見其它不很平凡的例子.

如果 $L_\Omega$ 是有余格，我們說 $\Omega$ 是綫性变换的完全可約集合. 这

自然意味着：如果 $\mathfrak{S}$ 是关于 $\Omega$ 的任意不变子空間，則有使 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{S}'$ 的另一个不变子空間 $\mathfrak{S}'$ 存在．因为这个条件可使用于每个不变子空間 $\mathfrak{S}$．所以規避它倒不如承認它为佳．故可注意的是，这些(可能是无限的)条件的集合可以下面給出的单一条件来代替．

**定理 2.** 一个綫性變換集合 $\Omega$ 是完全可約的必須而且只須 $\mathfrak{R}$ 可寫成關于 $\Omega$ 不變的与不可約的子空間 $\mathfrak{R}_i$ 的直接和．

証 充分性．令 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_s$，这里 $\mathfrak{R}_i$ 是不可約的不变子空間．如果 $\mathfrak{S}$ 是任意不变子空間，則或者 $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$，或者存在有一个 $\mathfrak{R}_i$，譬如是 $\mathfrak{R}_1$，使 $\mathfrak{R}_1 \not\subseteq \mathfrak{S}$．于是，令 $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S} + \mathfrak{R}_1$．今 $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}_1 \in L_\Omega$，并且因为 $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}_1$ 含于不可約的不变子空間 $\mathfrak{R}_1$ 里，所以或者 $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1$，或者 $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}_1 = 0$．因为 $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1$ 等价于 $\mathfrak{S} \supseteq \mathfrak{R}_1$，故必有 $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}_1 = 0$．于是，$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S} + \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{R}_1$．今以 $\mathfrak{S}_1$ 代替 $\mathfrak{S}$ 而重复上面論証，則或者 $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R}$，此时 $\mathfrak{R}_1$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个余空間，或者有一个 $\mathfrak{R}_i$ 存在，譬如是 $\mathfrak{R}_2$，使 $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{R}_2$；則 $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2$．最后在記法的适宜选取下得 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_h$．于是，$\mathfrak{S}' = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_h$ 是 $\mathfrak{R}$ 里 $\mathfrak{S}$ 的一个余空間．

必要性．設 $\mathfrak{R}_1$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个不可約的不变子空間，則或者 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1$ 是不可約的，或者 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_1'$，这里 $\mathfrak{R}_1'$ 是一个非零不变子空間．次令 $\mathfrak{R}_2$ 是 $\mathfrak{R}_1'$ 的一个不可約的不变子空間．如果 $\mathfrak{R}_1' = \mathfrak{R}_2$，則有 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2$，这里 $\mathfrak{R}_i$ 便是所求的不可約的不变子空間．否則，$\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ 有一个余空間 $\mathfrak{R}_2'$，这里 $\mathfrak{R}_2'$ 是不变子空間．于是，$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \mathfrak{R}_2'$．然后对于 $\mathfrak{R}_2'$ 重复上面論証，最后就引到 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_s$，这里 $\mathfrak{R}_i$ 是不可約的不变子空間．

## 習 題 35

1. 使用定理 2 的前半論証，証明：如果 $\mathfrak{R}$ 是不可約的不变子空間 $\mathfrak{R}_i$ 的和(不須是直接和)，則 $\mathfrak{R}$ 关于 $\Omega$ 是完全可約的．

2. 証明：如果 $\omega$ 是对角陣的任意集合，則綫性变换的对应集合 $\Omega$ 是完全可約的．

3. 令 $G = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ 是綫性变换的一个有限羣，亦即 $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}$ 的 1—1 綫性变换羣的一个子羣．設 $G$ 的阶 $m$ 不能为 $\Delta$ 的特征数所除尽．証明：如果 $\mathfrak{S}$ 是关

于 $G$ 的一个不变子空間，而 $E$ 是到 $\mathfrak{S}$ 上的一个射影，则 $E_0 = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} S_i E S_i^{-1}\right)$ 是 $\mathfrak{S}$ 上一个射影，它与 $S_i$ 可交换．于是，証明下面的重要定理：

如果綫性变换的任意有限羣的阶不能为可除环的特征数所除尽，则这个羣是完全可約的。

4．令 $\Omega$ 是綫性变换的一个任意集合，并令 $E$ 是任意射影，它对于 $\Omega$ 里每个 $A$ 使 $EA = EAE$ 成立．仿§2，定义 $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{R}E$ 到 $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}E$ 内的綫性变换 $A_E$ 为 $\bar{x}A_E = x(AE - EA)$．証明：如果存在有 $\bar{\mathfrak{R}}$ 到 $\mathfrak{S}$ 内的綫性变换 $D$ 使 $A_E = AD - DA$ 对于所有 $A$ 成立，则 $\mathfrak{S}$ 有一个余不变子空間。

5．証明：如果 $\Omega$ 是完全可約的，并且 $\mathfrak{S}$ 是不变子空間，则在 $\mathfrak{S}$ 里誘导的綫性变换集合是完全可約的。

***6. 与算子羣論及模論的关系**　这里講述的綫性变換集合的理論可看作带算子羣（$M$-羣）論[1]的一种特殊化．讀者如熟悉带算子羣論，就会看出这里是論述加法羣 $\mathfrak{R}$，作为带算子集合 $M = \Delta_l \cup \Omega$ 的羣，这里 $\Delta_l$ 是純量乘法的集合．$M$-子羣的概念显然与关于綫性变換集合 $\Omega$ 的不变子空間的概念重合．所以，可約性、可分解性、合成空間列等的概念与关于 $M$-羣 $\mathfrak{R}$ 的这些概念重合。

$M$-羣論还提示了引入关于集合 $\Omega$ 的不变子空間或商空間之間的同态的下述概念．如果 $\theta$ 是一个綫性变換，而且对于所有誘导变換 $A \in \Omega$，$(xA)\theta = (x\theta)A$ 成立，则映照 $\theta$ 說是一个这样空間到另一个空間内的一个 $\Omega$-綫性变換．同理，如果存在有 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 的一个 1—1 $\Omega$-綫性变換 $\theta$，則說这两个子空間 $\mathfrak{R}_i (i = 1, 2)$ 是 $\Omega$-同构的，或等价的．如果 $(e_1, e_2, \cdots, e_r)$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 的一个基，则 $(e_1\theta, e_2\theta, \cdots, e_r\theta)$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 的一个基，并可直接驗証：每个 $A$ 关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_r)$ 及关于 $(e_1\theta, e_2\theta, \cdots, e_r\theta)$ 有相同的陣．故对于 $\mathfrak{R}_1$ 与 $\mathfrak{R}_2$ 里任意选择的基，任意 $A \in \Omega$ 的陣 $(\alpha_1)$ 与 $(\alpha_2)$ 間有 $(\alpha_2) = (\mu)(\alpha_1)(\mu)^{-1}$ 联系着，这里满秩陣 $(\mu)$ 与 $A$ 无关。

今可述下面两个基本定理，它們是从 $M$-羣論轉来的。

**約当-霍尔德定理**　如果 $0 \subset \mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{R}_t = \mathfrak{R}$ 与 $0 \subset \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{S}_u = \mathfrak{R}$ 是關于綫性變換集合 $\Omega$ 的兩个合成空間列，則 $t = u$，並且合成因子 $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_{i-1}$，$\mathfrak{S}_j/\mathfrak{S}_{j-1}$ 可編成 1—1

1) 参看本书第一卷的第五章及第六章。

对应使各个对应对是 $\Omega$–同構.

**克魯尔–叔密特定理** 如果 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\oplus\mathfrak{R}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}_h=\mathfrak{S}_1\oplus\mathfrak{S}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{S}_k$ 是 $\mathfrak{R}$ 關于 $\Omega$ 分解为非零不變的並且不可分解的子空間的兩种分解，則 $h=k$，並且如果 $\mathfrak{S}_i$ 經適宜編序後，$\mathfrak{R}_i$ 与 $\mathfrak{S}_i$ 是 $\Omega$–同構的.

关于这些定理的証明，讀者可参看第一卷第五章.

我們还可把当前的理論并入模理論中. 这由 $\mathfrak{R}$ 是可交換的事实而出現. 于是，$\mathfrak{R}$ 的自同态构成一个环，而集合 $M=\Delta_l\cup\Omega$ 产生 $\mathfrak{R}$ 的自同态环的一个子环 $\mathfrak{o}(M)$. $\mathfrak{o}=\mathfrak{o}(M)$ 叫做 $M$ 的**封裹环**. 如果 $\mathfrak{S}$ 是加法羣 $\mathfrak{R}$ 的一个子羣，則 $\mathfrak{R}$ 里把 $\mathfrak{S}$ 映到自身內的自同态集合是自同态环的一个子环. 所以，如果 $\mathfrak{S}$ 是一个 $\Omega$–子空間，則这个子环含有 $M$，从而它也含有 $\mathfrak{o}(M)$. 故知，$\mathfrak{R}$ 的任意 $\Omega$–子空間是一个 $\mathfrak{o}(M)$–子羣. 逆定理显然成立. 仿此可見：如果 $\theta$ 是一个 $\Omega$–綫性变换，則 $\theta$ 是一个 $\mathfrak{o}(M)$–同态；并且一般說来，从集合 $M$ 变为它的封裹环毋須作什么更改. 我們在論述自同态环中，已經知道把基础的羣看作模常見方便.

要获得封裹环 $\mathfrak{o}(M)$ 的結构通常是困难的，并且遇到这种情形时，从綫性变換集合的观点改变为模的观点是沒有特殊收获. 如果 $\Delta=\Phi$ 是一个域，則决定 $\mathfrak{o}$ 的結构的問題比在一般情形下来得容易. 此时，我們还看到 $\Phi_l$ 含于綫性变換环里，而 $\mathfrak{o}$ 可看作 $\Phi$ 上一个代数. 因此在这个情形下我們叫它做集合 $\Omega$ 的**封裹代数**.

**7. 单独一个綫性变換的可約性、可分解性、完全可約性** 我們再采用原来观点，并且在这一节里考虑 $\Omega$ 由单独一个綫性变換所构成而 $\Delta=\Phi$ 是一个域的这个特殊情形.

如果 $f$ 是 $\mathfrak{R}$ 里一个非零向量，則循环子空間 $\{f\}$ 是一个非零的不变子空間. 令 $\mu_f(\lambda)$ 是 $f$ 的指导多項式，并且設 $\mu_f(\lambda)=\pi(\lambda)\nu(\lambda)$，这里 $\pi(\lambda)$ 是不可約的，并且有正的次数与以 1 为首項系数. 則 $g=f\nu(A)$ 有指导多項式 $\pi(\lambda)$. 故 $\mathfrak{R}$ 含有一个向量，它的指导多項式是素多項式. 今設 $A$ 是不可約的；此时我們有 $\mathfrak{R}=\{g\}$，这里 $\mu_g(\lambda)=\pi(\lambda)$ 是一个素多項式. 反过来，設 $\mathfrak{R}$ 有

这种形状，并且令 $\mathfrak{S}$ 在 $A$ 下是非零不变子空間. 如果 $h$ 是 $\mathfrak{S}$ 里一个向量，则指导多項式 $\mu_h(\lambda)$ 是 $\pi(\lambda)$ 的一个因子. 所以，如果 $h\neq 0$,则 $\mu_h(\lambda)=\pi(\lambda)$. 于是, $\dim\{h\}=\deg\pi(\lambda)=\dim\{g\}$. 故知 $\{h\}=\{g\}$. 因此証明了下面的定理.

**定理 3.** $\Phi$ 上空間 $\mathfrak{R}$ 里一个綫性變換 $A$ 是不可約的必須而且只須它是循环的並有素多項式为最低多項式.

次考虑单独一个綫性变換的可分解性問題. 我們知道, $\mathfrak{R}=\{f_1\}\oplus\{f_2\}\oplus\cdots\oplus\{f_t\}$. 所以,不可分解性的必要条件是 $t=1$, 亦即 $\mathfrak{R}=\{f\}$ 是循环空間. 我們还知道，如果循环綫性变換的最低多項式可写成 $\mu_1(\lambda)\mu_2(\lambda)$, 而 $(\mu_1(\lambda),\ \mu_2(\lambda))=1$, 则 $\mathfrak{R}=\{g_1\}\oplus\{g_2\}$,这里 $\mu_{g_i}(\lambda)=\mu_i(\lambda)$. 于是,循环綫性变換是可分解的,除非它的最低多項式的形状为 $\pi(\lambda)^k$,而 $\pi(\lambda)$ 是素多項式. 反过来,这些条件是充分的;这因为,設 $A$ 是循环的,而以 $\pi(\lambda)^k$ 为它的最低多項式. 設 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\oplus\mathfrak{R}_2$, 这里 $\mathfrak{R}_i$ 关于 $A$ 是不变子空間. 令 $\mu_i(\lambda)$ 是 $A$ 在 $\mathfrak{R}_i$ 里誘导的变換的最低多項式. 因为对于 $\mathfrak{R}_i$ 里所有 $x_i$ 有 $x_i\pi(A)^k=0$, 故 $\mu_i(\lambda)\,|\,\pi(\lambda)^k$. 于是, $\mu_i(\lambda)=\pi(\lambda)^{k_i}$ $(k_i\leqslant k)$. 但对于 $\mathfrak{R}_i$ 里所有 $x_i$, $x_i\pi(A)^{k_i}=0$,故这可推得:如果 $\bar{k}=\max(k_1,k_2)$,则 $\pi(A)^{\bar{k}}=0$. 故 $\bar{k}=k$,因此可設 $k_1=k$. 这意味着 $A$ 在 $\mathfrak{R}_1$ 里的最低多項式是 $\pi(\lambda)^k$. 于是, $\mathfrak{R}_1$ 里有一个向量 $f_1$ 存在，它的指导多項式是 $\pi(\lambda)^k$. 故 $\dim\{f_1\}=\deg\pi(\lambda)^k=\dim\mathfrak{R}$. 所以, $\{f_1\}=\mathfrak{R}$;又因为 $\{f_1\}\subseteq\mathfrak{R}_1$,所以 $\mathfrak{R}_1=\mathfrak{R}$. 故分解法 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\oplus\mathfrak{R}_2$ 就不恰当.

**定理 4.** $\Phi$ 上空間 $\mathfrak{R}$ 里綫性变換 $A$ 是不可分解的必須而且只須它是循环變換並且它的最低多項式是素多項式的冪.

次設 $A$ 是完全可約的,则 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\oplus\mathfrak{R}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}_s$, 这里 $\mathfrak{R}_i$ 是不变的并且不可約的. 由定理 3 知, $A$ 在 $\mathfrak{R}_i$ 里的最低多項式是素多項式 $\pi_i(\lambda)$. 所以, $A$ 在 $\mathfrak{R}$ 里的最低多項式 $\mu(\lambda)$ 是 $\pi_i(\lambda)$ 的最小公倍式. 于是, $\mu(\lambda)$ 是不同的素多項式的积. 反过来，令 $A$ 是一个綫性变換，它的最低多項式 $\mu(\lambda)$ 是不同的素多項式的积，则每个不变因子也有这种形状. 所以，初等因子理想的形状是

$(\pi_i(\lambda))$,这里 $\pi_i(\lambda)$ 是素多项式. 但我們知道,这可推得 $\mathfrak{R}$ 是循环子空間 $\mathfrak{R}_i=\{g_i\}$ 的直接和,这里指导多项式 $\mu_{g_i}(\lambda)=\pi_i(\lambda)$. 由定理3知,每个 $\mathfrak{R}_i$ 是不可約的;故 $\mathfrak{R}$ 是完全可約的. 这証明了下面的定理.

**定理 5.** $\Phi$ 上空間 $\mathfrak{R}$ 里一个綫性變換 $A$ 是完全可約的必須而且只須它的最低多項式是不同的素多項式的積.

### 習 題 36

1. 令 $A$ 是循环綫性变换,它的最低多项式为 $\mu(\lambda)$. 証明:如果 $\mathfrak{S}$ 在 $A$ 下不变,則 $\mathfrak{S}$ 是一个循环子空間. 証明:$\mathfrak{R}$ 的不变子空間可安排使与 $\mu(\lambda)$ 的因子(它們的首項系数 $=1$)成1—1对应.

2. 令 $\Phi$ 是无限域,并令 $\mathfrak{R}=\{f_1\}\oplus\{f_2\}$ 是 $\mathfrak{R}$ 关于 $A$ 的一个分解,使 $\mu_{f_1}(\lambda)=\mu_{f_2}(\lambda)=\pi(\lambda)$ 是一个素多項式,証明:$\mathfrak{R}$ 在 $A$ 下有无数个不变子空間.

3. 証明:如果 $\Phi$ 是无限域,則关于 $A$ 的不变子空間的个数为有限的必須而且只須 $A$ 是循环变换.

**8. 空間关于一个綫性变换的准素支空間** 一个向量空間关于一个綫性变换分解成不可分解的子空間的分解法不是唯一决定的. 另一方面,我們将在本节里指出,有一种分解法虽然不象分解为不可分解的支空間的分解法那样細致,但是它却保留有唯一性的主要长处.

令 $\mu(\lambda)$ 是 $A$ 的最低多项式,并令

$$\mu(\lambda)=\pi_1(\lambda)^{k_1}\pi_2(\lambda)^{k_2}\cdots\pi_s(\lambda)^{k_s} \tag{13}$$

是 $\mu(\lambda)$ 分解为不同的不可約多項式的冪的因子分解,这里每个多項式的首項系数 $=1$. 令 $\mathfrak{R}_i$ 是能使

$$x_i\pi_i(A)^{k_i}=0 \tag{14}$$

的 $\mathfrak{R}$ 里向量 $x_i$ 构成的子空間. 則我們可断言,空間 $\mathfrak{R}_i$ 关于 $A$ 是不变的,并且

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\oplus\mathfrak{R}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}_s. \tag{15}$$

$\mathfrak{R}_i$ 的不变性是 $\pi_i(A)^{k_i}$ 与 $A$ 可交换这一事实的直接推論[1]. (15)的証明原可由使用前节的結果得出,但我們将給出一个独立的討

1) 参看习題32的第一題.

論，这由于討論的本身具有若干兴趣的緣故。

首先我們注意到多項式

$$(16)\qquad \mu_i(\lambda)=\mu(\lambda)/\pi_i(\lambda)^{k_i}=\pi_1(\lambda)^{k_1}\cdots\pi_{i-1}(\lambda)^{k_{i-1}}\pi_{i+1}(\lambda)^{k_{i+1}}\cdots\pi_s(\lambda)^{k_s}\quad (i=1,2,\cdots,s)$$

是互素的；所以有多項式 $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda), \cdots, \phi_s(\lambda)$ 存在使

$$(17)\qquad \phi_1(\lambda)\mu_1(\lambda)+\phi_2(\lambda)\mu_2(\lambda)+\cdots+\phi_s(\lambda)\mu_s(\lambda)=1.$$

把 $A$ 代入这个关系，得

$$(18)\qquad \phi_1(A)\mu_1(A)+\phi_2(A)\mu_2(A)+\cdots+\phi_s(A)\mu_s(A)=1.$$

因为 $i\neq j$ 时 $\mu_i(\lambda)\mu_j(\lambda)$ 可以 $\mu(\lambda)$ 除尽，故

$$\phi_i(A)\mu_i(A)\phi_j(A)\mu_j(A)=0.$$

令 $E_i=\phi_i(A)\mu_i(A)$，則这个关系說明

$$(19)\qquad E_iE_j=0\quad (i\neq j),$$

并且(18)变成

$$(20)\qquad E_1+E_2+\cdots+E_s=1.$$

如果以 $E_i$ 乘这个关系，并使用(19)，得

$$(21)\qquad E_i^2=E_i.$$

故 $E_i$ 是正交射影，它們的和等于 1，因此

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}E_1\oplus\mathfrak{R}E_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}E_s.$$

因为 $E_i$ 是含 $A$ 的多項式，它們与 $A$ 可变换；所以空間 $\mathfrak{R}E_i$ 关于 $A$ 是不变的. 今将証明：$\mathfrak{R}E_i$ 与使 $x_i\pi_i(A)^{k_i}=0$ 的向量 $x_i$ 构成的空間 $\mathfrak{R}_i$ 重合. 首先令 $y_i\in\mathfrak{R}E_i$，則 $y_i=uE_i=u\phi_i(A)\mu_i(A)$. 因为 $\mu_i(\lambda)\pi_i(\lambda)^{k_i}=\mu(\lambda)$，这就給出

$$y_i\pi_i(A)^{k_i}=u\phi_i(A)\mu_i(A)\pi_i(A)^{k_i}=u\phi_i(A)\mu(A)=0.$$

所以，$y_i\in\mathfrak{R}_i$. 反过来，令 $x$ 是 $\mathfrak{R}_i$ 里一个向量，

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_s,$$

其中 $x_j\in\mathfrak{R}E_j$，則

$$0=x\pi_i(A)^{k_i}=x_1\pi_i(A)^{k_i}+x_2\pi_i(A)^{k_i}+\cdots+x_s\pi_i(A)^{k_i},$$

又因为 $x_j\pi_i(A)^{k_i}\in\mathfrak{R}E_j$，故每个

$$x_j\pi_i(A)^{k_i}=0.$$

另一方面，$x_j\pi_j(A)^{k_j}=0$，并且因为 $i\neq j$ 时 $\pi_i(\lambda)$，$\pi_j(\lambda)$ 是不相同的，故可推知，$j\neq i$ 时，$x_j=0$. 于是，$x=x_i\in\mathfrak{R}E_i$. 这就完成了 $\mathfrak{R}_i=\mathfrak{R}E_i$ 的証明.

显然施于 $\mathfrak{R}_i$ 的 $A$ 的最低多项式的形状是 $\pi_i(\lambda)^{l_i}$，这里 $l_i\leqslant k_i$. 如果 $x=x_1+x_2+\cdots+x_s$，这里 $x_i\in\mathfrak{R}_i$，及 $\mu^*(\lambda)=\pi_1(\lambda)^{l_1}\pi_2(\lambda)^{l_2}\cdots\pi_s(\lambda)^{l_s}$，則对于所有 $i$ 还有 $x_i\mu^*(A)=0$. 于是，$x\mu^*(A)=0$ 而 $\mu^*(A)=0$. 所以，$\mu(\lambda)|\mu^*(\lambda)$. 这显然可推得 $\mu(\lambda)=\mu^*(\lambda)$ 及 $l_i=k_i\ (i=1, 2, \cdots, s)$. 这就完成了下面定理的証明.

**定理6.** 令 $\mu(\lambda)$ 是 $\Phi$ 上空間 $\mathfrak{R}$ 里綫性變換 $A$ 的最低多項式，並且令(13)是 $\mu(\lambda)$ 分解为素多項式的冪的因子分解. 如果 $\mathfrak{R}_i$ 定义为能使 $x_i\pi_i(A)^{k_i}=0$ 的向量 $x_i$ 構成的子空間，則

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\oplus\mathfrak{R}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}_s,$$

並且 $A$ 在 $\mathfrak{R}_i$ 里的誘導變換的最低多項式是 $\pi_i(\lambda)^{k_i}$.

空間 $\mathfrak{R}_i$ 叫做 $\mathfrak{R}$ 关于 $A$ 的准素支空間. 由分解(15)决定的射影 $E_i$ 叫做 $A$ 的主同势元素.

今专就 $\Phi$ 是代数閉域的情形来討論. 此时，$\pi_i(\lambda)$ 是一次式，命 $\pi_i(\lambda)=\lambda-\rho_i$. 令

$$N_i=(A-\rho_i1)E_i,$$

則

$$A=AE_1+AE_2+\cdots+AE_s \tag{22}$$
$$=(\rho_1E_1+N_1)+(\rho_2E_2+N_2)+\cdots+(\rho_sE_s+N_s).$$

显然，如果 $i\neq j$，則

$$N_iN_j=0,\quad E_iN_j=0=N_jE_i, \tag{23}$$

并且

$$E_iN_i=N_i=N_iE_i. \tag{24}$$

还有 $N_i^{k_i}=(A-\rho_i1)^{k_i}E_i=E_i(A-\rho_i1)^{k_i}$；并且，如果 $x$ 是任意向量，則 $xE_i\in\mathfrak{R}_i$. 再則 $x_i(A-\rho_i1)^{k_i}=0$. 这証明了

$$N_i^{k_i}=0. \tag{25}$$

无势綫性变换 $N_i$ 叫做 $A$ 的主无势元素. 这些綫性变换与 $E_i$ 相

似，也是含 $A$ 的多項式.

## 習 題 37

1. 令 $\Phi$ 是代数閉域，它的特征数是 0，并設 $E_i, N_i(i=1,2,\cdots,s)$ 分别是 $A$ 的主同势元素及主无势元素，并設 $A=\Sigma(\rho_i E_i+N_i)$. 如果 $\phi(\lambda)$ 是一个多項式，証明：

$$\phi(A)=\Sigma\left[\phi(\rho_i)E_i+\frac{\phi'(\rho_i)}{1!}N_i+\frac{\phi''(\rho_i)}{2!}N_i^2+\cdots+\frac{\phi^{(k_i-1)}(\rho_i)}{(k_i-1)!}N_i^{k_i-1}\right].$$

**9. 交換綫性变換的集合** 今設 $\Omega$ 是 $\Phi$ 上空間 $\mathfrak{R}$ 里交換綫性变換的集合. 首先，假定 $\Omega$ 是不可分解的，我們将証 $\Omega$ 里任意 $A$ 的最低多項式是素多項式的冪. 这因为，否則我們可得 $\mathfrak{R}$ 的一个眞分解如 $\mathfrak{R}_1\oplus\mathfrak{R}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}_s$，这里 $\mathfrak{R}_i$ 是关于 $A$ 的准素支空間. 显然，如果 $B$ 是与 $A$ 可交換的一个綫性变換，則 $\mathfrak{R}_iB\subseteq\mathfrak{R}_i$. 所以，$\mathfrak{R}_i$ 关于 $\Omega$ 是不变的，而这就与 $\Omega$ 的不可分解性矛盾了.

次設 $\mathfrak{R}$ 是不可約的，則可断言：每个 $A$ 的最低多項式是不可約的. 这因为，如果 $\pi(\lambda)$ 是 $\mu(\lambda)$ 的一个不可約因子，則使 $y\pi(A)=0$ 的向量 $y$ 构成的空間 $\mathfrak{S}\neq 0$. 显然，$\mathfrak{S}$ 关于 $\Omega$ 是不变的. 所以 $\mathfrak{S}=\mathfrak{R}$，而 $\pi(\lambda)=\mu(\lambda)$.

今令 $\Omega$ 是交換綫性变換的任意集合. 我們先分解 $\mathfrak{R}$ 为

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^{(1)}\oplus\mathfrak{R}^{(2)}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}^{(h)},$$

这里 $\mathfrak{R}^{(i)}$ 是不可分解的. 显然，由 $A\in\Omega$ 在任意不变子空間里的誘导变換与在任意商空間里的誘导变換是可交換的. 这特别对于 $\mathfrak{R}^{(i)}$ 是成立的. 所以，由不可分解情形所得的結果指出：施于 $\mathfrak{R}^{(i)}$ 里的任意 $A$ 的最低多項式是素多項式的冪 $\pi_i(\lambda)^{k_i}$. 今对于每个 $\mathfrak{R}^{(i)}$ 选取一个合成空間列

$$0\subset\mathfrak{R}_1^{(i)}\subset\mathfrak{R}_2^{(i)}\subset\cdots\subset\mathfrak{R}_{t_i}^{(i)}=\mathfrak{R}^{(i)}. \tag{26}$$

則每个商空間 $\mathfrak{R}_j^{(i)}/\mathfrak{R}_{j-1}^{(i)}$ 关于誘导变換是不可約的. 所以，$A$ 在 $\mathfrak{R}_j^{(i)}/\mathfrak{R}_{j-1}^{(i)}$ 里的誘导变換 $\bar{A}$ 的最低多項式是不可約的. 另一方面，$\pi_i(\bar{A})^{k_i}=0$. 所以，$\bar{A}$ 的最低多項式是 $\pi_i(A)$.

今对应于(26)选择 $\mathfrak{R}^{(i)}$ 的一个基，亦即先取作为 $\mathfrak{R}_1^{(i)}$ 的基的一組向量，次把它补充而得 $\mathfrak{R}_2^{(i)}$ 的一个基，余仿此类推. 对于不

同的 $\mathfrak{R}^{(i)}$ 这样决定的基构成 $\mathfrak{R}$ 的一个基. 对于这个基，$A$ 的陣的形状为

$$(27)\qquad \begin{bmatrix} (\alpha_1) & & & \\ & (\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\alpha_h) \end{bmatrix},$$

这里与 $\mathfrak{R}^{(i)}$ 相伴的陣块 $(\alpha_i)$ 的形状为

$$(28)\qquad \begin{bmatrix} (\beta_1) & & & 0 \\ & (\beta_2) & & \\ & & \ddots & \\ * & & & (\beta_{t_i}) \end{bmatrix}.$$

陣 $(\beta_j)$ 是誘导綫性变换 $\bar{A}$ 的陣. 所以,它的最低多项式是 $\pi_i(\lambda)$.

今設 $\Phi$ 是代数閉域，則 $\pi_i(\lambda)=\lambda-\rho_i$. 所以，$\bar{A}=\rho_i 1$ 是 $\mathfrak{R}_j^{(i)}/\mathfrak{R}_{j-1}^{(i)}$ 里一个純量乘法. 因为任意子空間关于純量乘法是不变的,所以 $\mathfrak{R}_j^{(i)}/\mathfrak{R}_{j-1}^{(i)}$ 是一維空間. 于是，陣 $(\beta_j)$ 都是一阶方陣. 故最后結果可述成下面关于陣的定理:

**定理 7.** 令 $\Phi$ 是代數閉域，並令 $\omega$ 是屬于 $\Phi_n$ 的交換陣的集合,則 $\Phi_n$ 里有一个滿秩陣 $(\mu)$ 存在,使对于所有 $(\alpha)$ 有

$$(\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}=\begin{bmatrix} (\alpha_1) & & & \\ & (\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\alpha_n) \end{bmatrix},$$

这里

$$(\alpha_i)=\begin{bmatrix} \rho_i & & & 0 \\ & \rho_i & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \rho_i \end{bmatrix}.$$

**習　題　38**

1. 令 $\Phi$ 是复数域,并且令

$$(\alpha)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\quad (\beta)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

驗証 $(\alpha)(\beta)=(\beta)(\alpha)$，并用这一对陣解释定理 7.

2. (印格拉罕 Ingraham) 令 $A$ 是陣块形状的一个陣

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix},$$

这里 $A_{ij}$ 是元素在代数閉域里的 $r\times r$ 陣. 設 $A_{ij}$ 可互相交换，并定义

$$\det_R A=\sum \pm A_{1i_1}A_{2i_2}\cdots A_{mi_m},$$

这里是对 $1,2,\cdots,m$ 的所有排列 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 求和，并按排列是偶的或奇的而分别取符号 $+$ 或 $-$. 使用定理 7 証明下面的行列式传递性质:

$$\det(\det_R A)=\det A.$$

(这对于任意基域成立. 参看第七章的 § 9).

3. (叔尔 Schur) 証明: 在 $\Phi_n$ 里能够选取綫性无关的交换陣的最大个数是 $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$，这里 $[\alpha]$ 按慣例表示实数 $\alpha$ 里的最大整数.

# 第五章

# 双綫性形式

本章专研究函数的某些类型，叫做双綫性的，它們是就向量对 $(x,y')$ 来定义，这里 $x$ 是左向量空間 $\mathfrak{R}$ 里的向量，而 $y'$ 是右向量空間 $\mathfrak{R}'$ 里的向量．假定$g(x,y')$的值属于$\Delta$，并且假定一个变向量固定时所得另一个变向量的函数 $g_x(y') = g(x,y')$ 及 $g_{y'}(x) = g(x,y')$都是綫性的．其中最饒趣味的是非退化双綫性形式．它們决定 $\mathfrak{R}'$ 到 $\mathfrak{R}$ 的綫性函数空間上的 1—1 綫性变换．所以，如果 $A$ 是$\mathfrak{R}$里一个綫性变换，則在 $\mathfrak{R}'$ 里有一个折轉綫性变换伴随它．

如果可除环$\Delta$有一个反自同构，则$\Delta$上任意左向量空間 $\mathfrak{R}$ 也可看作 $\Delta$ 上一个右向量空間．所以，此时就有可能定义連結一个空間与它自身的双綫性形式；这样形式叫做純量积．它們的研究等价于陣的某种等价类型叫做同步性的研究．純量积的最重要类型是厄米特(Hermite)，对称及交錯純量积．我們将要找出这样形式的典型陣，并且在与初等几何有关系的某些特殊情形給出同步性問題的完全解答．我們还証明关于厄米特形式的威特(Witt)定理，并且应用它来定义特征数 $\neq 2$ 的任意可除环上这样形式的符号差的概念．

**1. 双綫性形式** 如果 $\mathfrak{R}$ 是$\Delta$上(左)向量空間，我們曾定义綫性函数为使

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\quad f(\alpha x) = \alpha f(x) \tag{1}$$

的一个映照 $x \to f(x) \in \Delta$．这些映照关于合成

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\quad (f\alpha)(x) = f(x)\alpha \tag{2}$$

构成一个右向量空間 $\mathfrak{R}^*$．我們已知，这些定义可推得：对于每个固定向量 $x \in \mathfrak{R}$，映照 $f \to x(f) \equiv f(x)$是 $\mathfrak{R}^*$ 里一个綫性函数．由

于这种对称性使我們把 $f(x)=x(f)$ 看作一对 $x\in\mathfrak{R}$ 与 $f\in\mathfrak{R}^*$ 的函数. 所以,用 $s(x,f)$ 来表示值 $f(x)$; 于是上面的方程就变为

(3) $\quad s(x+y,f)=s(x,f)+s(y,f),\ s(\alpha x,f)=\alpha s(x,f),$

(4) $\quad s(x,f+g)=s(x,f)+s(x,g),\ s(x,f\alpha)=s(x,f)\alpha.$

今由假定 $\mathfrak{R}'$ 是 $\Delta$ 上任意右向量空間而使这情况一般化,于是,如果对于所有向量对 $(x,y')$(这里 $x\in\mathfrak{R},y'\in\mathfrak{R}'$)定义的函数 $g(x,y')$,它的值 $g(x,y')\in\Delta$,并且适合

(5) $g(x_1+x_2,y')=g(x_1,y')+g(x_2,y'),\ g(\alpha x,y')=\alpha g(x,y'),$

(6) $g(x,y_1'+y_2')=g(x,y_1')+g(x,y_2'),\ g(x,y'\alpha)=g(x,y')\alpha,$

則这个函数叫做**双綫性形式**. 显然 $s(x,f)$ 是对于空間 $\mathfrak{R}$ 与它的共軛空間 $\mathfrak{R}^*$ 的一个双綫性形式.

我們在另一方面要証:共軛空間 $\mathfrak{R}^*$ 可用以給出双綫性形式的別样定义. 先令 $g(x,y')$ 是連結左向量空間 $\mathfrak{R}$ 与右向量空間 $\mathfrak{R}'$ 的一个双綫性形式. 把向量 $y'$ 固定,而把 $g(x,y')$ 看作 $x$ 的函数. 因此記 $g(x,y')=g_{y'}(x)$. 于是,由(5)知 $g_{y'}(x)$ 是綫性函数,亦即它属于共軛空間 $\mathfrak{R}^*$. 至此,让 $y'$ 变,而考察映照 $y'\to g_{y'}\in\mathfrak{R}^*$. 以 $R$ 表示这个映照;由(6)知

$$g_{y_1'+y_2'}(x)=g(x,y_1'+y_2')=g(x,y_1')+g(x,y_2')=g_{y_1'}(x)+g_{y_2'}(x),$$
$$g_{y'\alpha}(x)=g(x,y'\alpha)=g(x,y')\alpha=g_{y'}(x)\alpha,$$

故 $R$ 是綫性的. 同理,如果固定 $x$,則函数 $g_x(y')=g(x,y')$ 是 $y'$ 的綫性函数. 所以, $g_x$ 是在 $\mathfrak{R}'$ 的共軛空間 $(\mathfrak{R}')^*$ 里. 映照 $L:x\to g_x$ 是 $\mathfrak{R}$ 到 $(\mathfrak{R}')^*$ 里的一个綫性变換.

反过来,設給出右向量空間 $\mathfrak{R}'$ 到 $\mathfrak{R}$ 的綫性函数空間 $\mathfrak{R}^*$ 內的一个綫性变換 $R:y'\to g_{y'}(x)$,則可把 $g_{y'}(x)$ 看作 $(x,y')$ 的一个函数 $g(x,y')$,这里 $x\in\mathfrak{R}$, $y'\in\mathfrak{R}'$; 并且可驗証这个函数是一个双綫性形式. 故知,关于双綫性形式的概念的一个等价定义是从右向量空間 $\mathfrak{R}'$ 到 $\mathfrak{R}$ 的共軛空間 $\mathfrak{R}^*$ 內的綫性变換的概念. 同理,我們还可說:一个双綫性形式是 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{R}'$ 的共軛空間 $(\mathfrak{R}')^*$ 內的一个綫性变換. 但,原来的定义在当前具体表示上有对称性的长处,故此后还是沿用它.

## 習 題 39

1. 証明：如果 $g(x, y')$ 是一个双綫性形式，而 $A$ 是 $\Re$ 里一个綫性变换，則 $g(xA, y')$ 是一个双綫性形式.

**2. 双綫性形式的陣** 今設 $\Re$ 与 $\Re'$ 是有限維向量空間，而 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$，$(f_1', f_2', \cdots, f_{n'}')$ 順序是这两个空間的基，則陣

$$(7)\qquad \begin{bmatrix} g(e_1,f_1')g(e_1,f_2')\cdots g(e_1,f_{n'}') \\ g(e_2,f_1')g(e_2,f_2')\cdots g(e_2,f_{n'}') \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g(e_n,f_1')g(e_n,f_2')\cdots g(e_n,f_{n'}') \end{bmatrix}$$

叫做双綫性形式 $g$ 关于給定的基的陣. 双綫性形式 $g$ 完全由这个陣决定；这因为，如果 $x$ 及 $y'$ 是 $\Re$ 及 $\Re'$ 里任意向量，則可写 $x = \sum_1^n \xi_i e_i$，$y' = \sum_1^{n'} f_j'\eta_j$，而得

$$g(x, y') = g(\sum \xi_i e_i, \sum f_j'\eta_j) = \sum \xi_i g(e_i, f_j')\eta_j.$$

所以，$g(x, y')$ 可由 $x$ 与 $y'$ 的表示式及由(7)的元素 $g(e_i, f_j')$ 而知道. 我們还明白，如果 $(\beta_{ij})$ 是元素在 $\Delta$ 里的任意 $n\times n'$ 陣，則存在有一个双綫性形式 $h(x, y')$，它以这个陣作为它关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$，$(f_1', f_2', \cdots, f_{n'}')$ 的陣，这因为，我們可定义

$$g(x, y') = \sum \xi_i \beta_{ij}\eta_j.$$

并且容易驗証这个函数是双綫性的. 因为 $g(e_i, f_j') = \beta_{ij}$，所以 $g$ 的陣是給定的陣.

今述在两个空間里的基改变时 $g(x, y')$ 的陣 $(\beta)$ 所受的影响. 令 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 是 $\Re$ 里第二个基，$u_i = \sum \mu_{ij}e_j$，这里 $(\mu)\in L(\Delta, n)$，并令 $(v_1', v_2', \cdots, v_{n'}')$ 是 $\Re'$ 里第二个基，$v_k' = \sum f_l'\nu_{lk}$，$(\nu)\in L(\Delta, n')$，則

$$g(u_i, v_k') = g(\sum \mu_{ij}e_j, \sum f_l'\nu_{lk}) = \sum \mu_{ij}\beta_{jl}\nu_{lk},$$

所以新陣是与 $(\beta)$ 等价的陣 $(\mu)(\beta)(\nu)$. 我們要注意到在交換环情形下这个关系通常以稍微不同的形状出現. 此时，一般把所有向量空間作为左向量空間来考慮. 于是，$\Re'$ 里基的改变是 $v_k' = \sum \nu_{kl}f_l'$，

而双綫性形式的新陣是 $(\mu)(\beta)(\nu)'$，这里$(\nu)'$是陣 $(\nu)=(\nu_{kl})$ 的折轉陣.

今再就任意的 $\Delta$ 这个一般情形来說，在綫性变換論里曾証[1]得:如果$(\beta)$是任意矩陣，它的元素在$\Delta$里，則有滿秩方陣$(\mu)$及$(\nu)$存在使

$$(\mu)(\beta)(\nu)=\operatorname{diag}\{1,\cdots,1,0,\cdots,0\}. \tag{8}$$

陣方面的这个結果导出关于双綫性形式的下面基本定理:

**定理 1.** 如果 $g(x,y')$是結連向量空間 $\mathfrak{R}$ 及 $\mathfrak{R}'$的一个双綫性形式，則这兩个空間里有基 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，$(v_1',v_2',\cdots,v_{n'}')$ 存在使

$$\begin{aligned}&g(u_i,v_j')=\delta_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,r),\\&g(u_i,v_j')=0\ \ (i>r\quad\text{或}\quad j>r).\end{aligned} \tag{9}$$

显然 $r$ 是$g(x,y')$的陣$(\beta)$的(行或列)秩. 这个 $r$ 的抽象特性将于下一节給出.

**3. 非退化形式** 如果$g(x,y')$是一个双綫性形式，則对于所有$y'\in\mathfrak{R}'$能使$g(z,y')=0$的向量 $z\in\mathfrak{R}$ 的全体成一个子空間$\mathfrak{N}$. 叫做$g$ 的左根集. 仿此，我們定义右根集 $\mathfrak{N}'$ 是对于所有 $x$ 能使$g(x,z')=0$ 的所有向量 $z'$ 組成的 $\mathfrak{R}'$ 的子空間. 由定义显見:左(右)根集恰是$\mathfrak{R}(\mathfrak{R}')$ 到$\mathfrak{R}'(\mathfrak{R})$的共軛空間$\mathfrak{R}^*$ 内的綫性变換$L(R)$的膨空間. 如果 $(f_1',f_2',\cdots,f_{n'}')$ 是 $\mathfrak{R}'$ 的一个基，而 $z\in\mathfrak{N}$，則$g(z,f_j')=0\ (j=1,2,\cdots,n')$. 从这$n'$个方程$g(z,f_j')=0$可推得$g(z,x')=0$ 对于所有$x'$成立. 所以，这些条件也是$z\in\mathfrak{N}$的充分条件. 今令$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是$\mathfrak{R}$的一个基，記$z=\sum_1^n\zeta_ie_i$，則

$$0=g(z,f_j')=g(\sum\zeta_ie_i,f_j')=\sum_{i=1}^n\zeta_i\beta_{ij}(j=1,2,\cdots,n') \tag{10}$$

是 $z=\sum\zeta_ie_i\in\mathfrak{N}$ 的条件. 故 $\dim\mathfrak{N}$ 是(10)的綫性无关解的最大解数. 所以 $\dim\mathfrak{N}=n-r$，这里 $r$ 是 $(\beta)$ 的秩. 同理可知$\dim\mathfrak{N}'=n'-r$. 我們还注意到:如果使用定理 1 里的正規化基，

---

1) 見第二章 § 6.

则可見 $\mathfrak{N}=[u_{r+1},u_{r+2},\cdots,u_n]$ 而 $\mathfrak{N}'=[v'_{r+1},v'_{r+2},\cdots,v'_{n'}]$. 这因为，$j>r$ 时显然 $u_j\in\mathfrak{N}$. 如果 $\sum\gamma_i u_i\in\mathfrak{N}$, 則特别在 $k\leqslant r$ 时有

$$0=(\sum\gamma_i u_i,v'_k)=\gamma_k.$$

所以向量的形状为 $\sum_{r+1}^{n}\gamma_i u_i$, 因此它属于 $[u_{r+1},u_{r+2},\cdots,u_n]$. 这証明了关于 $\mathfrak{N}$ 的論断. 类似的論証可使用于 $\mathfrak{N}'$ 而得关于 $\mathfrak{N}'$ 的論断.

我們知道，$\dim\mathfrak{R}L+\dim\mathfrak{N}=n$, 及 $\dim\mathfrak{R}'R+\dim\mathfrak{N}'=n'$, 故 $\dim\mathfrak{R}L=r=\dim\mathfrak{R}'R$.

如果 $\mathfrak{N}=0,\mathfrak{N}'=0$，則双綫性形式 $g$ 說是**非退化的**. 所以，对于所有 $y'$ 能使 $g(z,y')=0$ 的 $\mathfrak{R}$ 里向量 $z$ 仅有 $z=0$，而对于所有 $x$ 能使 $g(x,z')=0$ 的 $\mathfrak{R}'$ 里向量 $z'$ 仅有 $z'=0$，則 $g$ 是非退化的. 如果 $g$ 是非退化的，則映照 $L$ 及 $R$ 都是 1—1 的. 又因为 $\dim\mathfrak{N}=0=\dim\mathfrak{N}'$, 故 $n=r=n'$. 故知，如果 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}'$ 由一个非退化的双綫性形式結連着，則这两个空間有相同的維数 $n$. 我們还記得：一个空間与它的綫性函数空間有相同的維数. 所以，映照 $L$ 及 $R$ 是向量空間到相同維数的向量空間內的 1—1 綫性变换. 故知这些变换都是到对应空間上的映照. 关系 $n=r=n'$ 也是双綫性形式成为非退化的充分条件；这因为，由这些关系显然可推得 $\dim\mathfrak{N}=n-r=0$ 及 $\dim\mathfrak{N}'=n'-r=0$. 上面結果可总結为下面的定理.

**定理 2.** 結連 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}'$ 的一个双綫性形式 $g(x,y')$ 是非退化的充要條件为:1) $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}'$ 有相同的維數;2)这个形式關于任意一对基的陣是滿秩陣. 如果 $g$ 是非退化的，而 $f_1(y')$ 是 $\mathfrak{R}'$ 里一个綫性函數，則 $\mathfrak{R}$ 里存在有一个向量 $x$ 而且只有一个使 $g(x,y')=f_1(y')$ 对于所有 $y'$ 成立. 如果 $f_2(x)$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意綫性函數，則 $\mathfrak{R}'$ 里存在有唯一向量 $y'$ 使 $g(x,y')=f_2(x)$ 对于所有 $x$ 成立.

如果由一个非退化的双綫性形式 $g$ 結連两个向量空間 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}'$，則我們說这两个空間关于 $g$ 是**对偶的**. 設 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}'$ 关于 $g$ 是对偶的，幷令 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个給定的基. 取 $\mathfrak{R}'$ 的一个基 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，則得滿秩陣 $(\beta)$，这里 $\beta_{ij}=g(e_i,f_j)$. 令令 $(\nu)$ 是 $\Delta_n$

里任意满秩陣，并令 $v'_k = \sum f'_i v_{ik}$ 是 $\mathfrak{R}'$ 里对应的新基，則我們知道 $g(x,y')$ 关于基 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，$(v'_1,v'_2,\cdots,v'_n)$ 的陣是 $(\beta)(v)$. 故存在有 $\mathfrak{R}'$ 的一个唯一决定的基 $(e'_1,e'_2,\cdots,e'_n)$ 使 $g$ 关于 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，$(e'_1,e'_2,\cdots,e'_n)$ 的陣是恆等陣，亦即

(11) $$g(e_i,e'_j) = \delta_{ij} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n).$$

$e'_i$ 可由取 $(v) = (\beta)^{-1}$ 而得. 我們叫基 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，$(e'_1,e'_2,\cdots,e'_n)$ 做对偶空間是余基. 上面論証指出：$\mathfrak{R}(\mathfrak{R}')$ 里任一个基决定 $\mathfrak{R}'(\mathfrak{R})$ 里唯一的余基.

余基曾用于討論 $\mathfrak{R}$ 的子空間与 $\mathfrak{R}$ 的共軛空間 $\mathfrak{R}'$ 的子空間之間关联性的概念. 这些空間关于基本双綫性形式 $s(x,f) \equiv f(x)$ 是对偶的；这因为，对于所有 $x$ 如果 $f(x) = 0$，則由定义知 $f = 0$，并且如果 $x \neq 0$，則存在有一个綫性函数 $f$ 使 $f(x) \neq 0$. 关联空間上的結果可移用于一般情形. 設令 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}'$ 关于 $g(x,y')$ 是对偶的，如果 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子空間，定义 $\mathfrak{S}$ 的关联空間 $j(\mathfrak{S})$ 为对于所有 $x \in \mathfrak{S}$ 能使 $g(x,y') = 0$ 的向量 $y' \in \mathfrak{R}'$ 組成的子空間. 仿此可定义 $\mathfrak{R}'$ 的子空間 $\mathfrak{S}'$ 的关联空間 $j(\mathfrak{S}')$. 如同在 $\mathfrak{R}$ 及 $\mathfrak{R}'$ 的特殊情形[1]，我們可証 $\dim j(\mathfrak{S}) = n - \dim \mathfrak{S}$ 及 $\dim j(\mathfrak{S}') = n - \dim \mathfrak{S}'$. 这些关系与显著的关系 $j(j(\mathfrak{S})) \supseteq \mathfrak{S}$ 及 $j(j(\mathfrak{S}')) \supseteq \mathfrak{S}'$ 合併，可推得

$$j(j(\mathfrak{S})) = \mathfrak{S}, \quad j(j(\mathfrak{S}')) = \mathfrak{S}'.$$

如同在綫性函数空間的特殊情形，我們还可証明：映照 $\mathfrak{S} \to j(\mathfrak{S})$ 是 $\mathfrak{R}$ 的子空間的格到 $\mathfrak{R}'$ 的子空間的格上的一个反自同构. 这个反自同构的逆就是映照 $\mathfrak{S}' \to j(\mathfrak{S}')$；这事实留作习題，让讀者把討論的細节自行补充.

### 習 題 40

1. 令 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}'$ 由双綫性形式 $g(x,y')$ 結連着，并令 $\mathfrak{N}$ 与 $\mathfrak{N}'$ 是由这个形式所决定的根集. 如果 $x + \mathfrak{N} \in \mathfrak{R}/\mathfrak{N}$，而 $y' + \mathfrak{N}' \in \mathfrak{R}'/\mathfrak{N}'$，令 $g(x+\mathfrak{N}, y'+\mathfrak{N}') = g(x,y')$，証明：这就定义对于商空間 $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}$，$\mathfrak{R}'/\mathfrak{N}'$ 的一个非退化的双綫性形式.

**4. 綫性变换关于一对双綫性形式的折轉** 令 $\mathfrak{R}_i (i = 1,2)$ 是

1) 参看第二章 §10 的引理.

左向量空間，并令 $\mathfrak{R}_i'$ 是 $\mathfrak{R}_i$ 关于双綫性形式 $g_i(x_i, y_i')$ 的对偶空間。如果 $A$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内的一个綫性变换，则我們知道怎样用共軛空間 $\mathfrak{R}_2^*$ 到共軛空間 $\mathfrak{R}_1^*$ 内的綫性变换来定义折轉 $A^*$. 如果 $f \in \mathfrak{R}_2^*$，则 $fA^*$ 定义为 $Af$. 因此我們可用 $\mathfrak{R}_i'$ 到 $\mathfrak{R}_i^*$ 上的等价 $R_i$ 来定义 $\mathfrak{R}_2'$ 到 $\mathfrak{R}_1'$ 内的綫性变换，亦即令

(12) $$A' = R_2 A^* R_1^{-1}.$$

因为有了下面一系列的綫性映照：

$$R_2:\ \mathfrak{R}_2' \longrightarrow \mathfrak{R}_2^*,$$
$$A^*:\ \mathfrak{R}_2^* \rightarrow \mathfrak{R}_1^*,$$
$$R_1^{-1}:\ \mathfrak{R}_1^* \rightarrow \mathfrak{R}_1'.$$

上面这个积显然可以确定的. 我們还知道，$A'$ 是 $\mathfrak{R}_2'$ 到 $\mathfrak{R}_1'$ 内的一个綫性变换. 这个变换叫做 $A$ **关于双綫性形式 $g_1$ 及 $g_2$ 的折轉**.

其次是决定 $A'$ 的形状. 令 $y_2' \in \mathfrak{R}_2'$，则 $y_2'R_2$ 是空間 $\mathfrak{R}_2$ 里的綫性函数 $g_2(x_2, y_2')$. 再則 $y_2'R_2A^*$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 里使

(13) $$f_1(x_1) = g_2(x_1A, y_2')$$

的綫性函数 $f_1$. 最后，$y_2'R_2A^*R_1^{-1}$ 是对于所有 $x_1 \in \mathfrak{R}_1$ 能使

(14) $$f_1(x_1) = g_2(x_1A, y_2') = g_1(x_1, y_1')$$

的 $\mathfrak{R}_1'$ 里向量 $y_1'$. 映照 $A'$ 把 $y_2'$ 映到 $y_1'$，而按照上面方程，$y_1' = y_2'A'$ 是对于所有 $x_1 \in \mathfrak{R}_1$ 能使

(15) $$g_1(x_1, y_2'A') = g_2(x_1A, y_2')$$

的 $\mathfrak{R}_1'$ 里唯一决定的向量.

因为对偶性概念是一种对称性的概念，故在上面討論里可把 $\mathfrak{R}_i$ 与 $\mathfrak{R}_i'$ 的位置互换. 因此，如果 $A'$ 是 $\mathfrak{R}_2'$ 到 $\mathfrak{R}_1'$ 内的一个綫性变换，则定义它(关于給定形式)的折轉是映照 $A'' = L_1A'^*L_2^{-1}$，这里 $L_1$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_1'^*$ 上的基本等价，$A'^*$ 是 $A'$ 的折轉，而 $L_2$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 到 $\mathfrak{R}_2'^*$ 上的等价. 与(15)类似，我們可驗証：$x_1A''$ 是对于所有 $y_2' \in \mathfrak{R}_2'$ 能使

(16) $$g_2(x_1A'', y_2') = g_1(x_1, y_2'A')$$

的唯一决定的向量. 由(15)及(16)显然知，如果 $A'$ 是 $A$ 的折轉，则 $A$ 是 $A'$ 的折轉. 如果 $A''$ 是 $A'$ 的折轉，则 $A'$ 是 $A''$ 的折轉. 所以，两个对应 $A \rightarrow A'$，$A' \rightarrow A''$ 是互逆的. 于是，$A \rightarrow A'$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$

到 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2', \mathfrak{R}_1')$ 上的一个 1—1 映照，这里 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 內綫性变換的集合，而 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2', \mathfrak{R}_1')$ 是 $\mathfrak{R}_2'$ 到 $\mathfrak{R}_1'$ 內綫性变換的集合. 这当然也可由折轉的定义及映照 $A \to A'$ 的性質直接知道.

映照 $A \to A'$ 的代数性質也可由前此建立的关于映照 $A \to A^*$ 的性質演繹出；这里只作叙述，不加証明：1)如果 $B$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 內的另一个綫性变換，则

$$(A+B)' = A' + B'. \tag{17}$$

2) 如果 $\mathfrak{R}_3$ 与 $\mathfrak{R}_3'$ 是关于非退化的双綫性形式 $g_3(x_3, y_3')$ 的对偶空間，而 $C$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 到 $\mathfrak{R}_3$ 內的一个綫性变換，则 $C$ 关于 $g_2, g_3$ 的折轉記作 $C'$. 如果 $AC$ 关于 $g_1, g_3$ 的折轉記作 $(AC)'$，則有关系

$$(AC)' = C'A'. \tag{18}$$

3)通常，如果我們討論单一向量空間 $\mathfrak{R}$ 及它关于 $g(x, y')$ 的对偶空間，則 1) 及 2) 指出：映照 $A \to A'$ 是 $\mathfrak{R}$ 里綫性变換环到 $\mathfrak{R}'$ 里綫性变換环上的一个反同构，这里 $A'$ 是 $A$ 关于 $g$ 的折轉.

最后，我們要决定一个綫性变換的陣与它的折轉的陣之間的关系. 仍旧令 $A$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 內的一个綫性变換，并令 $\mathfrak{R}_1'$ 及 $\mathfrak{R}_2'$ 分別是关于双綫性形式 $g_1$ 及 $g_2$ 的对偶空間. 令 $(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 的一个基，而 $(e_1', e_2', \cdots, e_{n_1}')$ 是 $\mathfrak{R}_1'$ 里的余基. 同理，令 $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_2})$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 的一个基，而 $(f_1', f_2', \cdots, f_{n_2}')$ 是 $\mathfrak{R}_2'$ 里的余基. 設

$$e_i A = \sum_{k=1}^{n_2} \alpha_{ik} f_k \quad (i = 1, 2, \cdots, n_1),$$

$$f_l' A' = \sum_{j=1}^{n_1} e_j' \alpha_{jl}' \quad (l = 1, 2, \cdots, n_2).$$

則由条件

$$g_2(e_i A, f_l') = g_1(e_i, f_l' A')$$

得陣的关系

$$\alpha_{il} = \alpha_{il}'.$$

如同在空間及綫性函数的对偶空間的特殊情形，我們有：**如果使用余基于对偶空間，則变換 $A$ 的陣与它的折轉 $A'$ 的陣相等.**

## 習 題 41

1. 給上面 1), 2) 及 3) 的結果补充証明.

**5. 綫性变换与双綫性形式間的另一个关系** 仍設空間 $\mathfrak{R}_i$ 与 $\mathfrak{R}_i'(i=1,2)$ 关于 $g_i$ 是对偶的. 令 $u'$ 及 $v$ 顺序是 $\mathfrak{R}_1'$ 及 $\mathfrak{R}_2$ 里固定向量, 如果 $x$ 周历 $\mathfrak{R}_1$, 則映照

$$x \to g_1(x, u')v \tag{19}$$

是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内的一个綫性变换. 这可由双綫性形式的性質而明白的. 因为这个变换由 $u', v$ 所决定, 所以用"积" $u' \times v$ 来表示. 更一般地說, 如果 $u_1', u_2', \cdots, u_m' \in \mathfrak{R}_1'$, 而 $v_1, v_2, \cdots, v_m \in \mathfrak{R}_2$, 則綫性变换 $u_1' \times v_1 + u_2' \times v_2 + \cdots + u_m' \times v_m$ 是映照变换

$$x \to g_1(x, u_1')v_1 + g_1(x, u_2')v_2 + \cdots + g_1(x, u_m')v_m.$$

其次, 我們証明: $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内的任意綫性变换有这种形状. 这因为, 令 $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$, 并令 $(v_1, v_2, \cdots, v_r)$ 是秩空間 $\mathfrak{R}_1A$ 的一个基. 如果 $x$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 里任意向量, 則 $xA$ 有一个方法而且只有一个方法写成

$$xA = \phi_1 v_1 + \phi_2 v_2 + \cdots + \phi_r v_r \tag{20}$$

的形状, 这里系数 $\phi_i \in \Delta$. 因为这些系数由 $x$ 唯一决定, 我們可把它們作为 $x$ 的函数来考慮, 因此写做 $\phi_i = \phi_i(x)$. 故(20)可改写为

$$xA = \phi_1(x)v_1 + \phi_2(x)v_2 + \cdots + \phi_r(x)v_r. \tag{20'}$$

如果 $y$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 里另一个向量, 則

$$\begin{aligned}\sum \phi_i(x+y)v_i &= (x+y)A = xA + yA \\ &= \sum \phi_i(x)v_i + \sum \phi_i(y)v_i.\end{aligned}$$

所以, $\phi_i(x+y) = \phi_i(x) + \phi_i(y)$. 又由(20′), 如果 $\alpha \in \Delta$, 則

$$\begin{aligned}(\alpha x)A = \alpha(xA) &= \alpha\phi_1(x)v_1 + \alpha\phi_2(x)v_2 + \cdots \\ &+ \alpha\phi_r(x)v_r,\end{aligned}$$

由此推得 $\phi_i(\alpha x) = \alpha\phi_i(x)$. 所以, 函数 $\phi_i(x)$ 是綫性函数. 因为 $g_1(x, y')$ 是非退化形式, 故 $\mathfrak{R}_1'$ 里有向量 $u_i'$ 存在, 使对于所有 $x$, $\phi_i(x) = g_1(x, u_i')$. 因此,

$$xA = g_1(x, u_1')v_1 + g_1(x, u_2')v_2 + \cdots + g_1(x, u_r')v_r,$$

而 $A = u_1' \times v_1 + u_2' \times v_2 + \cdots + u_r' \times v_r$ 即为所求。

向量对 $(u_1', v_1), (u_2', v_2), \cdots, (u_m', v_m)$ 也定义 $\mathfrak{R}_2'$ 到 $\mathfrak{R}_1'$ 内的一个綫性变换 $A'$. 如果 $x' \in \mathfrak{R}_2'$, 則定义

$$x'A' = u_1' g_2(v_1, x') + u_2' g_2(v_2, x') + \cdots + u_m' g_2(v_m, x').$$

我們用

$$u_1' \times' v_1 + u_2' \times' v_2 + \cdots + u_m' \times' v_m$$

来表示这个变换. 这个記法指明: 变换 $A$ 及 $A'$ 关于双綫性形式 $g_1$ 与 $g_2$ 是折轉的; 这因为, 如果 $x$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 里任意向量, 而 $x'$ 是 $\mathfrak{R}_2'$ 里任意向量, 則

$$g_1(x, x'A') = g_1\left(x, \sum_i u_i' g_2(v_i, x')\right) = \sum_i g_1(x, u_i') g_2(v_i, x')$$

而

$$g_2(xA, x') = g_2\left(\sum_i g_1(x, u_i') v_i, x'\right) = \sum_i g_1(x, u_i') g_2(v_i, x').$$

所以, $g_1(x, x'A') = g_2(xA, x')$, 这証明了上面的論断.

我們再就綫性变换 $A$ 用 $\sum_i u_i' \times v_i$ 表示給予考虑. 由积 $u' \times v$ 的定义显見

$$(u_1' + u_2') \times v = u_1' \times v + u_2' \times v,$$
$$u' \times (v_1 + v_2) = u' \times v_1 + u' \times v_2. \tag{21}$$

$$u'\alpha \times v = u' \times \alpha v. \tag{22}$$

所以, 如果把 $u_i'$ 写成 $u_i' = \sum e_j' \beta_{ji}$, 則 $\sum u_i' \times v_i = \sum e_j' \beta_{ji} \times v_i = \sum e_j' \times \beta_{ji} v_i = \sum e_j' \times w_j$, 这里 $w_j = \sum \beta_{ji} v_i$. 所以, 如果我們能够把 $u_i' (i = 1, 2, \cdots, m)$ 用少于 $m$ 个的向量 $e_j'$ 表出, 則可得 $A = \sum u_i' \times v_i$ 用少于 $m$ 个的积 $e_j' \times w_j$ 之和表出. 同理, 如果 $v_i$ 能写成 $v_i = \sum \alpha_{ij} f_j$, 这里 $f$ 的个数小于 $m$, 則可得 $A$ 用少于 $m$ 个的积之和表出的式.

今令 $A = \sum_1^r u_i' \times v_i$ 是 $A$ 的一个表示式, 这里 $r$ 是最小的数, 則由上面的說明指出: 集合 $(u_1', u_2', \cdots, u_r')$ 及 $(v_1, v_2, \cdots, v_r)$ 是綫性无关的. 但 $\mathfrak{R}_1$ 里有向量 $(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ 存在使

$$g_1(u_i, u_j') = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, r).$$

于是，

$$u_i A = \sum_j g_1(u_i, u_j') v_j = v_i,$$

而$[v_1, v_2, \cdots, v_r] \subseteq \mathfrak{R}_1 A$. 另一方面，对于任意的 $x$ 有

$$xA = \sum_j g_1(x, u_j') v_j \in [v_1, v_2, \cdots, v_r].$$

所以 $\mathfrak{R}_1 A = [v_1, v_2, \cdots, v_r]$，而 $r$ 是$A$的秩. 如果使用上面决定的折轉的形式，則知秩空間 $\mathfrak{R}_2' A' = [u_1', u_2', \cdots, u_r']$. 这又給予$A$的秩等于$A'$的秩这一个定理以別証.

**6. 純量积** 如果 $\mathfrak{R}$ 是域$\Phi$上一个左向量空間，則我們知道 $\mathfrak{R}$ 也可看作$\Phi$上一个右向量空間. 所以，我們有可能定义結連 $\mathfrak{R}$ 与它自身的双綫性形式，并且有可能把 $\mathfrak{R}$ 看作它自身的一个对偶空間. 如果可除环 $\Delta$ 拥有一个反自同构，則这些論述也适用于可除环情形.

故設 $\Delta$ 是一个可除环，在这个环里定义有一个反自同构 $\alpha \to \bar{\alpha}$；也就是說定义一个映照，它是 $\Delta$ 到 $\Delta$ 自身上的 1—1 映照，并且适合条件：

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}. \tag{23}$$

譬如，$\Delta$可取为汉米頓的四維数构成的可除环，而 $\alpha \to \bar{\alpha}$ 是四維数映到它的共軛数的映照. 我們还知道，如果 $\Delta = \Phi$ 是一个域，則反自同构就是$\Phi$里一个自同构，所以，此时可取$\Phi$的任意自同构为 $\alpha \to \bar{\alpha}$. 特別是可取$\bar{\alpha} = \alpha$，亦即映照是恆等自同构. 这是古典的情形，在討論中将得到特殊的注意.

令 $\mathfrak{R}$ 是$\Delta$上一个(左)向量空間. 由使用給定的反自同构 $\alpha \to \bar{\alpha}$，容易把$\mathfrak{R}$改成 $\Delta$ 上一个右向量空間. 这只要令 $x\bar{\alpha} = \alpha x$，或者換句話說：如果 $\alpha \to \alpha^A$ 是 $\alpha \to \bar{\alpha}$ 的逆映照，則 $x\alpha = \alpha^A x$. 我們可以驗証用純量作右乘法的这个定义适合基本要求[1]. 于是，照这样做后，$\mathfrak{R}$ 就变为 $\Delta$ 上一个右向量空間. $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}$ 的左及右向量空

1) 参看第一章 §2.

間的維数是相等的. 事实上，如果 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个左(右)基，则显然也是一个右(左)基；这因为，如果 $x = \sum \xi_i e_i$，则 $x = \sum e_i \bar{\xi}_i$. 如果 $\sum e_i \delta_i = 0$，则还有 $\sum \delta_i^A e_i = 0$，故 $\delta_i^A = 0$，从而 $\delta_i = 0$. 我們也看出：$\mathfrak{R}$ 的任意左子空間是一个右子空間，其逆定理也成立.

今可考慮結連左向量空間 $\mathfrak{R}$ 与右向量空間 $\mathfrak{R}$ 的双綫性形式. 这样形式叫做**純量积**. 故純量积是定义在 $\mathfrak{R}$ 里的向量对 $(x, y)$ 的一个函数 $g(x, y)$，它的値 $\in \Delta$，并且适合方程

(24) $g(x_1 + x_2, y) = g(x_1, y) + g(x_2, y)$, $g(\alpha x, y) = \alpha g(x, y)$

(25) $g(x, y_1 + y_2) = g(x, y_1) + g(x, y_2)$, $g(x, \alpha y) = g(x, y)\bar{\alpha}$

因为 $\alpha y = y\bar{\alpha}$，所以(25)里第二个条件与(6)的第二部分等价.

如果 $[e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\Delta$ 上空間 $\mathfrak{R}$ 的一个基，$(\beta)$ 的元素 $\beta_{ij} = g(e_i, e_j)$，则陣 $(\beta)$ 叫做**純量积关于这个基的陣**. 这个概念显然是前面由双綫性形式結連的空間里的基所决定的这个形式的陣的概念的特殊化. 一般而論，陣与基把函数 $g(x, y)$ 完全决定；这因为，如果 $x = \sum \xi_i e_i$ 而 $y = \sum \eta_i e_i$，则由(24)及(25)得

$$g(x, y) = \sum_{i,j} \xi_i \beta_{ij} \bar{\eta}_j. \tag{26}$$

反过来，如果已知 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 与 $(\beta)$，则可用此方程来定义 $\mathfrak{R}$ 里一个純量积.

今討論基的改变对于純量积的陣的影响. 令 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的另一个基，并設 $f_i = \sum \mu_{ij} e_j$. 如果把它們看作右向量空間，则它們間的关系是 $f_i = \sum e_j \nu_{ji}$，这里 $\nu_{ji} = \bar{\mu}_{ij}$. 故結連右基的陣是 $(\nu) = (\bar{\mu})'$，这个陣叫做陣 $(\mu)$ 的**共軛折轉陣**. 我們已知 $g(x, y)$ 的新陣是 $(\gamma) = (\mu)(\beta)(\nu)$[1]. 故有关系

$$(\gamma) = (\mu)(\beta)(\bar{\mu})', \tag{27}$$

这里 $(\mu)$ 是給出左基的改变的陣. 按(27)用滿秩陣 $(\mu)$ 連結的两个陣 $(\beta)$ 与 $(\gamma)$ 説是(关于給定的反自同构)**同步的**. 这个关系易

---

1) 参看本章 §2.

知是一种等价．我們所建立的結果是：純量积的任意两个陣是同步的．如果$(\beta)$是純量积的陣，則与$(\beta)$同步的任意陣显然也是純量积的一个陣．

如果$\mathfrak{S}$是$\mathfrak{R}$的一个子空間，則函数$g(x,y)$限于$\mathfrak{S}$里向量对时(称短縮于$\mathfrak{S}$)，显然是$\mathfrak{S}$的一个純量积．至此很自然地引入$\mathfrak{R}$的子空間之間的下面等价概念．如果存在有子空間$\mathfrak{S}_1$到$\mathfrak{S}_2$上的一个1—1綫性变换$U$使$g(x_1, y_1) = g(x_1U, y_1U)$对于$\mathfrak{S}_1$里所有$x_1, y_1$都成立，則說$\mathfrak{S}_1$与$\mathfrak{S}_2$是$g$-等价的．如果$(e_1,e_2,\cdots,e_r)$是$\mathfrak{S}_1$的一个基，則$(e_1U,e_2U,\cdots,e_rU)$是$\mathfrak{S}_2$的一个基，并且$g(e_i, e_j) = g(e_iU,e_jU)$．于是，$g$关于这些基的短縮的陣是相等的．所以，如果在$g$-等价子空間里选择任意的基，則由这些基决定的陣是同步的．反过来，設$\mathfrak{S}_1$与$\mathfrak{S}_2$是子空間使$g$对于这些空間的短縮的陣是同步的，則在$\mathfrak{S}_2$里由基的适宜选取，可假設$\mathfrak{S}_1$里有一个基$(e_1,e_2,\cdots,e_r)$及$\mathfrak{S}_2$里有一个基$(f_1,f_2,\cdots,f_r)$使$g(e_i,e_j) = g(f_i, f_j)$．今令$x_1 = \sum\xi_ie_i$，$y_1 = \sum\eta_je_j$是$\mathfrak{S}_1$里任意两个向量，則有$\sum\limits_{i,j}\xi_ig(e_i,e_j)\bar{\eta}_j = \sum\limits_{i,j}\xi_ig(f_i,f_j)\bar{\eta}_j$，并且由此給出$g(x_1, y_1) = g(\sum\xi_if_i,\sum\eta_jf_j)$．因为，映照$x_1 = \sum\xi_ie_i \to \sum\xi_if_i$是$\mathfrak{S}_1$到$\mathfrak{S}_2$上一个1—1綫性变换，所以前面的关系指明$\mathfrak{S}_1$与$\mathfrak{S}_2$是$g$-等价的．

**7. 厄米特純量积** 今設反自同构$\alpha \to \bar{\alpha}$是对合的，亦即对于所有$\alpha$有$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$．我們先考虑厄米特純量积的理論，亦即对于所有$x$及$y$能使

$$g(y,x) = \overline{g(x,y)} \tag{28}$$

的理論．如果$\Delta = \Phi$是一个域，而$\bar{\alpha} \equiv \alpha$(容許这样做)，則厄米特条件化为

$$g(y,x) = g(x,y). \tag{29}$$

适合这个条件的純量积叫做对称純量积．

如果$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是$\Delta$上$\mathfrak{R}$的一个基，則条件(28)特别可推得

$$\beta_{ij} = g(e_i,e_j) = \overline{g(e_j,e_i)} = \bar{\beta}_{ji}.$$

所以，$g(x,y)$是厄米特純量积的一个必要条件是：純量积的陣是厄米特陣，亦即

$$(30) \qquad (\bar{\beta})' = (\beta).$$

这个条件也是充分的；这因为，如果(30)成立，且令 $x = \sum \xi_i e_i$ 及 $y = \sum \eta_i e_i$，则

$$g(y,x) = \sum \eta_i \beta_{ij} \bar{\xi}_j = \sum \eta_i \bar{\beta}_{ji} \bar{\xi}_j$$

而

$$\overline{g(x,y)} = \overline{\sum \xi_i \beta_{ij} \bar{\eta}_j} = \sum \eta_j \bar{\beta}_{ij} \bar{\xi}_i.$$

于是，$g(y,x) = \overline{g(x,y)}$. 特别是：$g(x,y)$是对称的必須而且只須它的陣是对称的($(\beta)' = (\beta)$).

如果$g(x,y)$是厄米特純量积，则对于特殊向量 $u, v$ 如果 $g(u,v) = 0$，可推知 $g(v,u) = \overline{g(u,v)} = 0$. 如果这个条件成立，则說向量 $u$ 与 $v$ (关于 $g$) 正交. 上面的說明指出正交关系是一个对称关系，亦即 $u$ 与 $v$ 正交，则 $v$ 也与 $u$ 正交. 如果 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子空間，则与 $\mathfrak{S}$ 里每个向量 $u$ 正交的向量 $v$ 构成的空間叫做 $\mathfrak{S}$ 的正交余空間，記作 $\mathfrak{S}^{\perp}$. 这与前此 $j(\mathfrak{S})$ 的定义重合. 应該指出，除重要的特殊情形(其中若干情形将于后章論述)外，在子空間格里 $\mathfrak{S}^{\perp}$ 通常不是 $\mathfrak{S}$ 的一个余空間.

与 $\mathfrak{R}$ 里每个向量 $x$ 正交的向量 $z$ 构成的子空間 $\mathfrak{R}^{\perp}$ 叫做 $g(x,y)$ 的根空間. 如果純量积的根空間 $\mathfrak{R}^{\perp} = 0$，则这純量积叫做非退化的. 我們知道，此时映照 $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}^{\perp}$ 是子空間格到它自身上的一个反自同构. 我們还知，$\dim \mathfrak{S}^{\perp} = n - \dim \mathfrak{S}$. 所以，$\dim \mathfrak{S}^{\perp\perp} = \dim \mathfrak{S}$. 因为显然 $\mathfrak{S}^{\perp\perp} \supseteq \mathfrak{S}$，故由这关系得 $\mathfrak{S}^{\perp\perp} = \mathfrak{S}$. 所以，由一个非退化的厄米特純量积决定的映照 $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}^{\perp}$ 在子空間格里是一个对合映照.

如果 $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}^{\perp} \neq 0$，则子空間 $\mathfrak{S}$ 叫做迷向的. 这显然可推得：$\mathfrak{S}$ 含有一个非零迷向向量 $u$，亦即使 $g(u,u) = 0$ 的向量 $u$. 如果 $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}^{\perp}$，则子空間 $\mathfrak{S}$ 叫做全迷向子空間.

如果 $g$ 是非退化的，而 $\mathfrak{S}$ 是一个非迷向子空間，则 $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}^{\perp} = 0$，并且 $\dim \mathfrak{S}^{\perp} = n - \dim \mathfrak{S}$. 所以在此时得到分解 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{S}^{\perp}$.

## 習 題 42

1. 証明:非零厄米特純量积的存在可推得反自同构 $\alpha\to\bar{\alpha}$ 是对合的(所以,在上面討論里,后者条件是多余的).

2. 証明:适合 $g(x,y)=g(y,x)$ 的非零純量积的存在可推得 $\bar{\alpha}\equiv\alpha$, 因此推知 $\Delta$ 是一个域.

3. 証明:如果$(\alpha)$及$(\beta)$是厄米特陣,則 $(\alpha)\pm(\beta)$, $(\alpha)^{r}$, $(\alpha)(\beta)+(\beta)(\alpha)$ 都是厄米特陣.

4. 如果純量积 $h(y,x)=-\overline{h(x,y)}$, 則 $h(x,y)$ 叫做斜厄米特純量积. 令 $\mu$ 是 $\Delta$ 的一个元素,适合 $\bar{\mu}=-\mu\neq0$, 并且令 $h(x,y)$ 是斜厄米特純量积. 証明: 映照 $\xi\to\xi^{*}\equiv\mu^{-1}\bar{\xi}\mu$ 在 $\Delta$ 里是一个对合反自同构, 并且 $g(x,y)=h(x,y)\mu$ 关于这个反自同构是厄米特純量积.

**8. 厄米特純量积的陣** 在厄米特純量积的討論中, 把特征数 2 的域上对称形式另行講述是比較方便的. 所以在本节里我們假定:如果 $g$ 是对称的,則 $\Delta=\Phi$ 的特征数 $\neq 2$.

先考虑由純量积决定的单一向量 $x$ 的函数$g(x,x)$. 如果$g(x,y)$是对称的,則連带的函数 $g(x,x)$ 叫做由对称形式决定的二次形式. 如果有非零向量 $u$ 存在使 $g(u,u)=\beta\in\Delta$, 我們通常說元素 $\beta$ 由純量积表示. 因为

$$g(u,u)=\overline{g(u,u)},$$

所以 $\beta=\bar{\beta}$. 于是, 由純量积表示的元素在反自同构下不变. 关于厄米特純量积的主要結果的証明中的一个重要步驟是下面的.

**引理.** 如果 $g(x,y)$ 是非零的厄米特純量積,則有由純量積表示的非零元素存在(換句話說,如果 $\mathfrak{R}$ 不是全迷向的,則它含有一个非迷向向量).

証 如果結論是錯誤的,則对于所有$u$, $g(u,u)=0$. 于是,对于所有 $x,y$,

$$g(x,y)+g(y,x)=g(x+y,x+y)-g(x,x)-g(y,y)=0.$$

因为 $g(y,x)=\overline{g(x,y)}$,由此就得出 $\overline{g(x,y)}=-g(x,y)$. 但因为 $g(x,y)\neq0$,故有向量 $u,v$ 存在使 $\rho=g(u,v)\neq0$. 如果以 $\rho^{-1}u$ 代替 $u$, 并改变記法,則可設 $g(u,v)=1$. 于是,对于$\Delta$里任意 $\alpha$ 有 $\overline{g(\alpha u,v)}=-g(\alpha u,v)$ 及 $\bar{\alpha}=-\alpha$. 因为 $\bar{1}=1$, ,这可推得特

征数是2，而 $\bar{\alpha} = \alpha$。所以，上面的反自同构是恆等映照，而 $\Delta = \Phi$ 是交換域。这种情形已在假設中除去。

上面所用的論証不是构造性的。但在 $g(x,y)$ 是对称的这个特殊情形，我們容易給出寻找向量 $u$ 使 $g(u,u) \neq 0$ 的构造方法。令 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\Phi$ 上 $\mathfrak{R}$ 的一个基，則有某个向量对 $e_i, e_j$ 使 $g(e_i,e_j) \neq 0$。如果 $i = j$，則可取 $u = e_i$；否則可設 $g(e_i,e_i) = 0 = g(e_j,e_j)$，而在 $i \neq j$ 时 $g(e_i,e_j) \neq 0$。于是，$g(e_i+e_j,e_i+e_j) = g(e_i,e_i) + g(e_i,e_j) + g(e_j,e_i) + g(e_j,e_j) = g(e_i,e_j) + g(e_j,e_i) = 2g(e_i,e_j) \neq 0$。

今回到一般情形而証下面的

**定理 3.** 如果 $g(x,y)$ 是厄米特純量積，則有一个基 $(u_1,u_2,\cdots,u_r,z_1,z_2,\cdots,z_{n-r})$ 存在使

(31) $$g(u_i,u_i) = \beta_i \neq 0 \quad (i = 1,2,\cdots,r),$$

而其它純量積都是0。

証 如果 $g = 0$，这个結果显然成立；因为此时任意一个基可用作 $z$ 的集合。如果 $g \neq 0$，我們可取任意向量为 $u_1$，只要 $g(u_1,u_1) = \beta_1 \neq 0$。由引理知这样向量是存在的。今設已决定了綫性无关向量 $(u_1,u_2,\cdots,u_k)$ 使 $g(u_i,u_i) = \beta_i \neq 0$，而 $i \neq j$ 时 $g(u_i,u_j) = 0$。引入由

(32) $$x \to \sum_1^k g(x,u_i)\beta_i^{-1}u_i$$

定义的映照 $E_k$。显然 $E_k$ 是綫性的，而把 $\mathfrak{R}$ 映到空間 $\mathfrak{S}_k = [u_1,u_2,\cdots,u_k]$ 內。又 $u_jE_k = \sum_i g(u_j,u_i)\beta_i^{-1}u_i = u_j$。于是，$E_k$ 在 $\mathfrak{S}_k$ 里是恆等映照。故 $E_k^2 = E_k$，因而如果命 $F_k = 1 - E_k$，則 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_k \oplus \mathfrak{R}F_k$。我們还有

$$g(xE_k,u_j) = g\left(\sum_{i=1}^k g(x,u_i)\beta_i^{-1}u_i, u_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^k g(x,u_i)\beta_i^{-1}g(u_i,u_j)$$

$= g(x, u_j).$

所以，$g(xF_k, u_j) = g(x(1-E_k), u_j) = g(x, u_j) - g(xE_k, u_j) = 0$. 故 $\mathfrak{R}F_k$ 里向量与 $\mathfrak{S}_k$ 里每个向量正交，亦即 $\mathfrak{R}F_k \subseteq \mathfrak{S}_k^{\perp}$. 我們考慮 $\mathfrak{R}F_k$ 里純量积 $g(x,y)$. 如果它在 $\mathfrak{R}F_k$ 里是0，則可在 $\mathfrak{R}F_k$ 里选一个基$(z_1, z_2, \cdots, z_m)$. 因为 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_k \oplus \mathfrak{R}F_k$，所以$(u_1, u_2, \cdots, u_k, z_1, z_2, \cdots, z_m)$是 $\mathfrak{R}$ 的一个基. 因为 $z$ 与 $u$ 正交并且与其它 $z$ 正交，所以这是所求形状的一个基. 另一方面，如果在 $\mathfrak{R}F_k$ 里 $g \neq 0$，則在这个空間里可求一个向量 $u_{k+1}$ 使 $g(u_{k+1}, u_{k+1}) = \beta_{k+1} \neq 0$. 于是，$(u_1, u_2, \cdots, u_{k+1})$是綫性无关集合，并且因为 $u_{k+1}$ 与其它 $u_i$ 正交，所以新集合适合与$(u_1, u_2, \cdots, u_k)$相同的条件. 于是可重复使用这方法.

我們給出的求正規化基的方法实質上創自拉格兰日(Lagrange). 應該指出，我們可取由純量积表示的任意元素做 $\beta_1$，并且可以 $\gamma_i u_i (\gamma_i \neq 0)$代替任意的 $u_i$；后者使 $\beta_i$ 变为 $\beta_i' = g(\gamma_i u_i, \gamma_i u_i) = \gamma_i \beta_i \bar{\gamma}_i$. 在施行上面方法时，需有 $\mathfrak{R}F_k$ 的一个基；这可由 $(u_1, u_2, \cdots, u_k)$补充成 $\mathfrak{R}$ 的一个基$(u_1, u_2, \cdots, u_k, v_1, v_2, \cdots, v_{n-k})$. 于是，$v_i F_k$ 构成 $\mathfrak{R}F_k$ 的一个基.

## 習 題 43

1. 如果 $\Phi$ 是有理数域，求与

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

同步的对角陣$(\beta)$，并求滿秩陣$(\mu)$使$(\mu)(\alpha)(\mu)' = (\beta)$.

2. 証明：定理3里給的空間$[z_1, z_2, \cdots, z_{n-r}]$是$g(x,y)$的根空間.

3. 設 $\Phi$ 的特征数 $\neq 2$，而 $g(x,y)$ 是 $\Phi$ 上 $\mathfrak{R}$ 里一个对称非退化的純量积. 証明：如果 $g$ 表示0，則 $g$ 是汎純量积，亦即它表示 $\Phi$ 的每个元素.

**9. 特殊可除环上对称及厄米特純量积** 上面討論把厄米特陣的同步性問題化为求对角陣的同步性的条件問題. 这个問題还沒有一般地解决. 已知的結果都是特殊情形，他們对于 $\Delta$ 的性質及反自同构的性質使用特殊的假定. 例如，有理数域上对称陣的同步性問題已获得完全解决. 关于这个情形的理論，主要是閔可斯

基(Minkowski)及哈斯(Hasse)的貢献，实質是算术的，这里就不討論了．本章余下部分的安排如次：本节及§10叙述同步性問題的特殊情形，它們是每个学习数学的人都应該知道的．末了两节叙述主要对专門学习代数的人感覚兴趣的問題；譬如，在§11里再考虑厄米特形式的一般理論，并且討論符号差概念的威特的重要推广；§12叙述特征数2的域上对称純量积理論．

我們先把上节結果限于对称陣及对称純量积（$\Delta = \Phi$ 是一个域，$\bar{\alpha} \equiv \alpha$），并設 $\Phi$ 的特征数 $\neq 2$．設 $g(x,y)$ 是一个对称純量积，并令 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 是能够使

$$g(u_i, u_j) = \delta_{ij}\beta_i, \beta_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

的一个基，則 $r$ 是 $g(x,y)$ 的陣 $\mathrm{diag}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ 的秩，并且 $r$ 是这个純量积的所有陣的公秩．我們已知可以 $v_i = \gamma_i u_i (\gamma_i \neq 0)$ 代替 $u_i$．于是，$v$ 构成另一个基，而由这个基决定的陣是

$$\mathrm{diag}\{\beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_n'\},$$

这里 $\beta_i' = \gamma_i^2 \beta_i$．故知任意 $\beta_i$ 可以 $\beta_i' = \gamma_i^2 \beta_i (\gamma_i \neq 0)$ 代替．今設 $\Phi$ 是这样的域，它的每个元素都是平方数．如果 $\gamma^2 = \beta$，則依慣例記 $\gamma = \beta^{1/2}$．于是，如果 $\beta_i \neq 0$，令 $\gamma_i = \beta_i^{-1/2} \equiv (\beta_i^{1/2})^{-1}$．这样选取的 $\gamma_i$ 把 $\beta_i$ 换成 $\beta_i' = 1$．于是，純量积的陣的形状是

$$\mathrm{diag}\{1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0\}. \tag{33}$$

特别在 $\Phi$ 是代数閉域时，这个形状可以适用．

如果 $(\beta)$ 是任意对称陣，則 $(\beta)$ 可用以定义 $\Phi$ 上 $\mathfrak{R}$ 里一个对称純量积．这个純量积的陣組成由 $(\beta)$ 决定的同步类．故知：如果 $\Phi$ 是特征数 $\neq 2$ 的代数閉域，則 $\Phi_n$ 里任意对称陣 $(\beta)$ 必与形状(33)的一个陣是同步的．显然(33)可由 $(\beta)$ 的秩完全决定．由此推得下面的

**定理 4.** 如果 $\Phi$ 是特徵数 $\neq 2$ 的代數閉域，則 $\Phi_n$ 里任意兩个对称陣是同步的必須而且只須它們有相同的秩．

次設 $\Phi$ 是实数域．把向量 $u_i$ 編列使

$$\beta_i > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, p); \beta_j < 0 \quad (j = p+1, \cdots, r),$$

則在 $i \leqslant p$ 时，可求 $\beta_i$ 的平方根；而在 $r \geqslant j > p$ 时可求 $-\beta_j$ 的平

方根. 故令 $\gamma_i = \beta_i^{-1/2}, \gamma_j = (-\beta_j)^{-1/2}$. 如上面使用 $\gamma_i$, 則得 $g(x,y)$的一个陣

$$(34)\qquad \{\overbrace{1,\cdots,1}^{p},\overbrace{-1,\cdots,-1}^{r-p},0,\cdots,0\}^{1)}.$$

由此知，任意实对称陣与形状(34)的陣是同步的. 其次，我們将証：形状(34)的两个陣除完全相等外在 $\Phi_n$ 里不能成同步的，这里 $\Phi$ 是实数域. 这个結果可由下面的定理得出：

**定理 5.** (席柏斯忒 Sylvester). 如果 $\Phi$ 是实數域；而对角陣

$$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\},\ \{\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_n'\}$$

在 $\Phi_n$ 里是同步的，則正的 $\beta_i$ 的个數 $p$ 与正的 $\beta_i'$ 的个數 $p'$ 相同.

証 給定的两个陣可取为 $\Phi$ 上空間 $\mathfrak{R}$ 里的同一个对称純量积的陣. 我們可設在前面的 $p$ 个 $\beta_i$ 及 $p'$ 个 $\beta_i'$ 都是 $>0$；并且这两个陣的前面 $r$ 个元素都 $\neq 0$，而后面 $n-r$ 个元素都是 0. 令 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 是一个基，$g(x,y)$ 关于这个基的陣是 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$；而 $(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 是一个基，$g(x,y)$ 关于这个基的陣是 $\{\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_n'\}$. 我們易知[2]，根空間

$$\mathfrak{R}^\perp = [u_{r+1},u_{r+2},\cdots,u_n] = [v_{r+1},v_{r+2},\cdots,v_n].$$

今引入下列的子空間：

$$\mathfrak{R}_+ = [u_1,u_2,\cdots,u_p],$$
$$\mathfrak{S}_+ = [v_1,v_2,\cdots,v_{p'}],$$
$$\mathfrak{R}_- = [u_{p+1},u_{p+2},\cdots,u_r],$$
$$\mathfrak{S}_- = [v_{p'+1},v_{p'+2},\cdots,v_r].$$

令 $y\in\mathfrak{R}_+ + \mathfrak{R}^\perp$，則 $y = \sum_1^p \eta_i u_i + \sum_{r+1}^n \eta_j u_j$，并且

$$g(y,y) = \sum_1^p \eta_i^2\beta_i.$$

因为 $\beta_i > 0 (i=1,2,\cdots,p)$，所以 $g(y,y)\geqslant 0$；并且只在所有

1) 本章此后遇到对角陣时，省略去記号 "diag".

2) 参看习題 43 的第 2 題.

$\eta_i = 0 (i \leqslant p)$时 $g(y,y) = 0$. 所以,如果 $y \in \mathfrak{R}_+ + \mathfrak{R}^\perp$,则 $g(y,y) \geqslant 0$; 并且只有 $y \in \mathfrak{R}^\perp$时, $g(y,y) = 0$. 类似結果对于 $\mathfrak{S}_+ + \mathfrak{R}^\perp$ 成立. 另一方面,如果 $y \in \mathfrak{R}_- + \mathfrak{R}^\perp$或 $y \in \mathfrak{S}_- + \mathfrak{R}^\perp$, 则类似的論証指出 $g(y,y) \leqslant 0$; 并且只有 $y \in \mathfrak{R}^\perp$ 时, $g(y,y) = 0$. 今令 $y \in (\mathfrak{R}_+ + \mathfrak{R}^\perp) \cap (\mathfrak{S}_- + \mathfrak{R}^\perp)$,則有 $g(y,y) \geqslant 0$ 及 $g(y,y) \leqslant 0$. 因此 $g(y,y) = 0$, 而 $y \in \mathfrak{R}^\perp$. 这建立了下面的关系:

$$(35) \qquad (\mathfrak{R}_+ + \mathfrak{R}^\perp) \cap (\mathfrak{S}_- + \mathfrak{R}^\perp) = \mathfrak{R}^\perp.$$

今使用一般維数关系[1]:

$$\dim(\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2) = \dim \mathfrak{S}_1 + \dim \mathfrak{S}_2 - \dim(\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2)$$
$$\geqslant \dim \mathfrak{S}_1 + \dim \mathfrak{S}_2 - n.$$

把这个关系用于(35),得

$$n - r \geqslant p + (n - r) + (r - p') + (n - r) - n.$$

所以 $p - p' \leqslant 0$. 仿此又得 $p' \leqslant p$; 所以 $p = p'$.

席柏斯忒定理指出,在与給定的实对称陣$(\beta)$同步的任意对角陣里, 正元素的个数是不变数. 在任意对角陣里正元素的个数与負元素的个数間之差 $2p - r$ 是一个不变数;这数目叫做陣的**符号差**(**慣性指数**). 此时,实对称陣的主要定理可述成

**定理 6.** 兩个实对称陣是同步的必須而且只須它們有相同的秩与相同的符号差.

次設 $\Phi$ 是复数域,而 $\alpha \to \bar{\alpha}$ 是一个复数映到它的共軛复数的映照. 令 $g(x,y)$是 $\Phi$ 上空間 $\mathfrak{R}$ 里的一个厄米特純量积,而 $\Phi$ 連带有通常映照 $\alpha \to \bar{\alpha}$. 則对于任意 $u$, $\overline{g(u,u)} = g(u,u)$ 是个实数. 特别是,如果$(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 是能使(31)成立的一个基,則元素 $\beta_i$ 是实数. 如果以 $v_i = \gamma_i u_i (\gamma_i \neq 0)$ 代替 $u_i$, 則 $\beta_i$ 化为 $\gamma_i \bar{\gamma}_i \beta_i = |\gamma_i|^2 \beta_i$. 所以此时 $\mathfrak{R}$ 有一个基;关于这个基,陣的形状也是(34).

席柏斯忒定理在当前情形下也成立. 它断定: 如果 $\Phi$ 是复数域,而$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$与$\{\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_n\}$是同步的,亦即 $L(\Phi, n)$里有一个陣$(\mu)$存在使,

---

1) 参看习題 8 的第 2 題.

$$\{\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_n'\} = (\mu)\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}(\bar{\mu})',$$

则正的 $\beta_i$ 的个数与正的 $\beta_i'$ 的个数相同. 證明恰与前面的証明相同;要点是:如果

$$y = \sum_i^p \eta_i u_i + \sum_{r+1}^n \eta_j u_j,$$

并且 $i \leqslant p$ 时 $\beta_i > 0$, 而 $j > r$ 时 $\beta_j = 0$, 则

$$g(y,y) = \sum |\eta_i|^2 \beta_i \geqslant 0.$$

与实数情形一样,我們有下面的判断准則:两个厄米特陣关于反自同构 $\alpha \to \bar{\alpha}$ 是同步的必須而且只須它們有相同的秩及相同的符号差. 这里符号差也是定义做: 在与給定的厄米特陣同步的一个对角陣里正元素个数与負元素个数之差.

最后,考虑四維数的厄米特形式的理論. 令 $\Delta$ 是汉米頓的四維数构成的可除环, 并且令 $\alpha \to \bar{\alpha}$ 是四維数 $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$ 映到它的共軛数

$$\bar{\alpha} = \alpha_0 - \alpha_1 i - \alpha_2 j - \alpha_3 k$$

的映照. 如果 $g(x,y)$ 是$\Delta$上 $\mathfrak{R}$ 里的厄米特純量积,则 $\overline{g(u,u)} = g(u,u)$ 是个实数. 再則 $\alpha\bar{\alpha} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \geqslant 0$, 而且只有 $\alpha = 0$时等式才成立. 这些說明指出,这个情形与复数的厄米特情形实質上相同. 形状(34)的陣在同步性下作为典型形式. 席柏斯 武定理及秩与符号差相等是同步性的充要条件也都成立.

## 習　題　44

1. 証明: $n$ 行 $n$ 列的实对称陣的同步类的个数是$(n+1)(n+2)/2$.

2. 求与实对称陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

同步的而形状为(34)的陣.

3. 求与厄米特四維数陣

$$\begin{bmatrix} -1 & 1+i-2j & -2j+k \\ 1-i+2j & 0 & 4j \\ 2i-k & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

同步的而形状为(34)的陣.

4. 証明：如果$(\alpha),(\beta),\cdots,(\nu)$ 是 a)实对称陣，或 b)复厄米特陣，或 c)四維数厄米特陣，則只有$(\alpha)=(\beta)=\cdots=(\nu)=0$时

$$(\alpha)^2+(\beta)^2+\cdots+(\nu)^2=0$$

才能成立。

**10. 交錯純量积** 如果对于所有$x$及$y$，純量积$g(x,y)=-g(y,x)$，則$g(x,y)$叫做*斜称純量积*。此时$g(x,x)=-g(x,x)$；如果特征数$\neq 2$，則可推得$g(x,x)=0$；如果特征数是$2$，$g(x,x)=0$对于所有$x$也可以仍然成立。如果对于所有$x$都得$g(x,x)=0$，則斜称純量积$g(x,y)$叫做*交錯純量积*。今来敘述求这个类型純量积的适宜的典型基問題。由§8的引理的証明知：如果$g(x,y)$是交錯的，則它是斜称的；并且如果$g\neq 0$是斜称的，則$\bar{\alpha}\equiv\alpha$而$\Delta=\Phi$是交換域。

設$g(x,y)$是交錯的，并且不恆等于0，則可求一对向量$u,v$使$g(u,v)\neq 0$。以$v$的适宜倍量$v_1$代替$v$，則得$u_1=u$与$v_1$使$g(u_1,v_1)=1$。于是，$g(v_1,u_1)=-1$，$g(u_1,u_1)=0=g(v_1,v_1)$。故$u_1$与$v_1$是綫性无关的。今設我們已找到$k$对向量$u_1,v_1;u_2,v_2,\cdots,u_k,v_k$，它們都是綫性无关的，并且适合

$$g(u_i,v_i)=1,\quad g(v_i,u_i)=-1, \tag{36}$$

而所有其它純量积都等于0。令$E_k$表示綫性变换

$$x\rightarrow\sum_1^k g(x,v_i)u_i-\sum_1^k g(x,u_i)v_i. \tag{37}$$

如同定理3的証明，我們知$E_k$是空間$\mathfrak{S}_k=[u_1,v_1,u_2,v_2,\cdots,u_k,v_k]$上一个射影。所以，如果$F_k=1-E_k$，則$\mathfrak{R}=\mathfrak{S}_k\oplus\mathfrak{R}F_k$。我們还可驗証$g(xE_k,u_i)=g(x,u_i)$，及$g(xE_k,v_i)=g(x,v_i)$。所以$g(xF_k,u_i)=0=g(xF_k,v_i)$，并且$\mathfrak{R}F_k\subseteq\mathfrak{S}_k^{\perp}$[1]。此时，$g$在$\mathfrak{R}F_k$里是0，或者在这个空間里我們可选一对向量$u_{k+1},v_{k+1}$使

$$g(u_{k+1},v_{k+1})=1=-g(v_{k+1},u_{k+1}).$$

因为$\mathfrak{S}_k\cap\mathfrak{R}F_k=0$，所以$(u_1,v_1,u_2,v_2,\cdots,u_{k+1},v_{k+1})$是一个无关集合，并且因为最后两个向量与前面的正交，所以$2(k+1)$个向量

1) $\mathfrak{S}_k^{\perp}$是$\mathfrak{S}_k$的正交余空間，它的定义类似厄米特純量积的定义。

的集合也适合了与$(u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_k, v_k)$相同的条件. 最后，或是生成整个空間，或是获得一个空間$\mathfrak{R}F_r$，使$g$在它里面等于0. 在后者情形下，我們取这个空間的任意基$(z_{2r+1}, \cdots, z_n)$，則$g(x, y)$关于基

$$(u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_r, v_r, z_1, z_2, \cdots, z_{n-2r})$$

的陣显然是

$$(38)\qquad \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \end{matrix}\right\} r\text{ 块} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

这証明了下面的定理.

**定理 7.** 如果$g(x,y)$是一个交錯純量積，則$\mathfrak{R}$有一个基存在使$g$關于这个基的陣的形狀是(38).

如果$g(x,y) \neq 0$是交錯的，則反自同构是恆等映照，而$g(x, y)$的陣$(\beta)$是交錯陣，亦即$(\beta)' = -(\beta)$，并且$\beta_{ii} = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$. 这些条件也是充分的；这因为，如果$x = \sum \xi_i e_i$，則

$$g(x,x) = \sum_{i,j} \beta_{ij}\xi_i\xi_j = \sum_i \beta_{ii}\xi_i^2 + \sum_{i<j} (\beta_{ij} + \beta_{ji})\xi_i\xi_j = 0.$$

所以$g(x,y)$是交錯純量积. 至此，下面的結果是定理7的直接推論.

**系 1.** 元素屬于域的一个交錯陣的秩是偶數.

**系 2.** $\Phi_n$里兩个交錯陣是同步的必須而且只須它們有相同的秩.

### 習 題 45

1. 証明：如果$\Phi$是有理数域，則在$\Phi_4$里

---

1) $\mathfrak{S}_k^{\perp}$是$\mathfrak{S}_k$的正交余空間，它的定义类似厄米特純量积的定义.

$$(\alpha)=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1 & 3\\ -2 & 0 & 4 & -2\\ 1 & -4 & 0 & 1\\ -3 & 2 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad (\beta)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

是同步的;并在 $L(\Phi,4)$ 里求一个 $(\mu)$ 使 $(\beta)=(\mu)(\alpha)(\mu)'$.

***11. 威特定理** 今再就可除环上厄米特純量积的一般理論来說. 在当前的討論里,我們假定基本反自同构 $\alpha\to\bar{\alpha}$ 适合下面的可解性条件.

**公理 S.** 方程 $\xi+\bar{\xi}=\beta$ 对于可除環的每个厄米特元素 $\beta$ 有一个解.

如果 $\Delta$ 的特征数 $\neq 2$, 就自动地适合这个公理;这因为,此时可取 $\xi=\frac{1}{2}\beta$. 在 $\Delta$ 的特征数为 2 的情形下,如果 $\Delta$ 的心 $\Gamma$ 里有元素 $\gamma$ 存在使 $\bar{\gamma}\neq\gamma$,則也适合这个公理;这因为反自同构把 $\Gamma$ 映到它自身,所以 $\delta=\gamma+\bar{\gamma}\neq 0$ 属于 $\Gamma$. 所以,如果 $\xi=\beta\gamma\delta^{-1}$, 則

$$\xi+\bar{\xi}=\beta\gamma\delta^{-1}+\beta\bar{\gamma}\delta^{-1}=\beta\delta^{-1}(\gamma+\bar{\gamma})=\beta.$$

最后,我們注意到这个公理要把 $\Delta=\Phi$ 而 $\Phi$ 是特征数 2 的域及 $\bar{\alpha}\equiv\alpha$ 的情形除外. 这道理很明显,因为此时 $\xi+\bar{\xi}=0$, 但 $\beta$ 无須为 0.

設 $\mathfrak{R}$ 是 $\Delta$ 上向量空間,而 $g(x,y)$ 关于反自同构 $\alpha\to\bar{\alpha}$ 是一个非退化的厄米特純量积. 我們已知,如果 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子空間,它不是迷向的,亦卽 $\mathfrak{S}\cap\mathfrak{S}^{\perp}=0$, 則得分解 $\mathfrak{R}=\mathfrak{S}\oplus\mathfrak{S}^{\perp}$. 我們要闡明的理論的基本結果是下面的定理:

**威特定理** 如果 $\mathfrak{S}_1$ 与 $\mathfrak{S}_2$ 是非迷向的而且是 $g$-等价的, 則 $\mathfrak{S}_1^{\perp}$ 与 $\mathfrak{S}_2^{\perp}$ 是 $g$-等价的[1].

證 我們証明关于 $\dim\mathfrak{S}_1=1$ 时的結果就够了;这因为,如果

---

1) 威特对于特征数 $\neq 2$ 的域上对称純量积証明这个結果(載在 Journal für Math., 卷 176(1937)). 帕勒(Pall)推广到特征数 $\neq 2$ 的可除环情形(載在 Bulletin Amer. Math. Soc., 卷 51(1945)). 在当前討論里,我們只假定公理 $S$ 成立. 讀者还可参看 Kaplansky 的 Forms in infinite dimensional spaces, Anais Acad. Brasil Ci. 22 (1950), 第 1—7 頁. 威特定理在对于特征数 2 的域上对称純量积不成立(参看下节).

已知这个情形，则可就 $\dim\mathfrak{S}_1$ 使用归纳法如次. 在 $\mathfrak{S}_1$ 里选一个向量 $u_1$ 使 $[u_1]$ 不是迷向的(定理 3 的引理)，于是 $\mathfrak{S}_1=[u_1]\oplus\mathfrak{U}_1$，这里 $\mathfrak{U}_1\subseteq[u_1]^\perp$. 使用 $\mathfrak{S}_1$ 与 $\mathfrak{S}_2$ 的等价性，则可写 $\mathfrak{S}_2=[u_2]\oplus\mathfrak{U}_2$，这里 $\mathfrak{U}_2\subseteq[u_2]^\perp$，$[u_1]$ 与 $[u_2]$ 是等价的，并且 $\mathfrak{U}_1$ 与 $\mathfrak{U}_2$ 是等价的. 于是，$[u_1]^\perp=\mathfrak{U}_1\oplus\mathfrak{S}_1^\perp$ 与 $[u_2]^\perp=\mathfrak{U}_2\oplus\mathfrak{S}_2^\perp$ 在一个变换 $U$ 下是等价的. 所以，$[u_2]^\perp=\mathfrak{U}_2\oplus\mathfrak{S}_2^\perp=\mathfrak{U}_1U\oplus\mathfrak{S}_1^\perp U$. 但 $\mathfrak{U}_2$ 与 $\mathfrak{U}_1U$ 是等价的，而 $\mathfrak{U}_1U$ 与 $\mathfrak{S}_1^\perp U$ 是正交的. 因为 $\dim\mathfrak{U}_1U<\dim\mathfrak{S}_1$ 而 $\mathfrak{U}_1$ 不是迷向的，故可設 $\mathfrak{S}_1^\perp U$ 与 $\mathfrak{S}_2^\perp$ 是等价的. 由此可推知，$\mathfrak{S}_1^\perp$ 与 $\mathfrak{S}_2^\perp$ 是等价的.

其次要說的是：$\mathfrak{S}_1=[u_1]$ 而 $\dim\mathfrak{R}$ 是任意的这个情形可由 $\mathfrak{S}_1=[u_1]$ 而 $\dim\mathfrak{R}=2$ 的特殊情形演繹出. 故設已知特殊情形的結果，令 $\mathfrak{S}_2=[u_2]$ 与 $[u_1]$ 等价，则得分解 $\mathfrak{R}=[u_1]\oplus[u_1]^\perp=[u_2]\oplus[u_2]^\perp$ 并且 $g(u_1,u_1)=g(u_2,u_2)$. 如果 $[u_1,u_2]$ 是一維，则 $[u_1]^\perp=[u_2]^\perp$，而定理成立. 于是，設 $\dim[u_1,u_2]=2$. 先考慮这个空間不是迷向的情形. 此时，

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{R}&=[u_1,u_2]\oplus[u_1,u_2]^\perp\\
&=[u_1]\oplus([u_1,u_2]\cap[u_1]^\perp)\oplus[u_1,u_2]^\perp\\
&=[u_2]\oplus([u_1,u_2]\cap[u_2]^\perp)\oplus[u_1,u_2]^\perp.
\end{aligned}\tag{39}
$$

于是，由 $\dim\mathfrak{R}=2$ 的情形，$[u_1,u_2]\cap[u_1]^\perp$ 与 $[u_1,u_2]\cap[u_2]^\perp$ 是等价的(施于 $\mathfrak{R}=[u_1,u_2]$). 故由(39)得

$$[u_1]^\perp=([u_1,u_2]\cap[u_1]^\perp)\oplus[u_1,u_2]^\perp$$

与

$$[u_2]^\perp=([u_1,u_2]\cap[u_2]^\perp)\oplus[u_1,u_2]^\perp$$

是 $g$-等价的. 次考慮 $[u_1,u_2]$ 是迷向的情形. 此时这个空間里有一个向量 $w\neq0$ 使 $g(w,u_1)=0=g(w,u_2)$. 在 $\mathfrak{R}$ 里可求一个 $t$ 使 $g(w,t)\neq0$. 于是 $[u_1,u_2,t]$ 里 $g$ 关于基 $(w,u_1,t)$ 的陣是

$$\begin{bmatrix}0&0&g(w,t)\\0&g(u_1,u_1)&*\\g(t,w)&*&*\end{bmatrix}.$$

显然这个陣的两个向量是綫性无关的；所以陣是滿秩的，并且 $[u_1,u_2,t]$ 不是迷向的. 于是，

$$\mathfrak{R} = [u_1,u_2,t]\oplus[u_1,u_2,t]^{\perp}$$
$$= [u_1]\oplus([u_1,u_2,t]\cap[u_1]^{\perp})\oplus[u_1,u_2,t]^{\perp}$$
$$= [u_2]\oplus([u_1,u_2,t]\cap[u_2]^{\perp})\oplus[u_1,u_2,t]^{\perp}.$$

故只須証$[u_1,u_2,t]\cap[u_1]^{\perp}$与$[u_1,u_2,t]\cap[u_2]^{\perp}$是等价的就够了. 但它們都是非迷向的二維空間,而含有一个迷向的一維子空間$[w]$. 在这种类型的空間里常可选择一个基使陣关于这个基是$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$. 要証这事实,选取$q$使$g(w,q)=1=g(q,w)$,并且令$z=q+\lambda w$. 于是,还有$g(z,w)=1=g(w,z)$,而$g(z,z)=g(q,q)+\lambda+\bar{\lambda}$. 由公理S,我們可选$\lambda$使$g(z,z)=0$. 这就得出所要形状的陣. 至此知$[u_1,u_2,t]\cap[u_1]^{\perp}$与$[u_1,u_2,t]\cap[u_2]^{\perp}$是等价的. 这就完成了归結到$\dim\mathfrak{R}=2$, $\dim\mathfrak{S}_1=1$情形的化簡.

最后考虑这个特殊情形. 这里要証的結果等价于說: 如果滿秩的对角厄米特陣$\{\alpha,\beta_1\}$与$\{\alpha,\beta_2\}$是同步的,則元素$\beta_1$与$\beta_2$是同步的. 令$(\mu)$是一个滿秩陣使

$$\begin{bmatrix}\mu_{11}&\mu_{12}\\\mu_{21}&\mu_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\mu}_{11}&\bar{\mu}_{21}\\\bar{\mu}_{12}&\bar{\mu}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta_2\end{bmatrix}. \tag{40}$$

如果$\Delta$是可交換的,由求行列式得$\beta_2=\mu\beta_1\bar{\mu}$,这里$\mu=\det(\mu_{ij})$,这就是所要的結果. 在一般情形,我們要由陣的关系給出的条件直接作处理. 这些条件是

$$\mu_{11}\alpha\bar{\mu}_{11}+\mu_{12}\beta_1\bar{\mu}_{12}=\alpha, \tag{41}$$

$$\mu_{11}\alpha\bar{\mu}_{21}+\mu_{12}\beta_1\bar{\mu}_{22}=0=\mu_{21}\alpha\bar{\mu}_{11}+\mu_{22}\beta_1\bar{\mu}_{12}, \tag{42}$$

$$\mu_{21}\alpha\bar{\mu}_{21}+\mu_{22}\beta_1\bar{\mu}_{22}=\beta_2. \tag{43}$$

如果$\mu_{11}=0$,因为$\mu_{12}\neq 0$,故由(42)得$\mu_{22}=0$. 于是,$\alpha=\mu_{12}\beta_1\bar{\mu}_{12}$而$\beta_2=\mu_{21}\alpha\bar{\mu}_{21}$. 由这些关系可推得$\beta_1$与$\beta_2$是同步的.

故設$\mu_{11}\neq 0$. 于是,由(42)得

$$\alpha\bar{\mu}_{21}=-\mu_{11}^{-1}\mu_{12}\beta_1\bar{\mu}_{22},$$
$$\mu_{21}=-\mu_{22}\beta_1\bar{\mu}_{12}\bar{\mu}_{11}^{-1}\alpha^{-1},$$

故由(43)得

$$\mu_{22}(\beta_1\bar{\mu}_{12}\bar{\mu}_{11}^{-1}\alpha^{-1}\mu_{11}^{-1}\mu_{12}\beta_1+\beta_1)\bar{\mu}_{22}=\beta_2.$$

所以 $\beta_2$ 与 $\beta_1\bar{\mu}_{12}\bar{\mu}_{11}^{-1}\alpha^{-1}\mu_{11}^{-1}\mu_{12}\beta_1+\beta_1$ 是同步的．我們还要証后者元素与 $\beta$ 是同步的．要达到这个目的，試解

$$(44)\qquad (1+\beta_1\bar{\mu}_{12}\xi\mu_{12})\beta_1(1+\bar{\mu}_{12}\bar{\xi}\mu_{12}\beta_1) = \beta_1\bar{\mu}_{12}\bar{\mu}_{11}^{-1}\alpha^{-1}\mu_{11}^{-1}\mu_{12}\beta_1+\beta_1.$$

如果

$$(45)\qquad \xi+\bar{\xi}+\xi\mu_{12}\beta_1\bar{\mu}_{12}\bar{\xi}=(\mu_{11}\alpha\bar{\mu}_{11})^{-1},$$

則可滿足上面方程．从(41)解出 $\mu_{12}\beta_1\bar{\mu}_{12}$，代入(45)得

$$(46)\qquad \xi+\bar{\xi}+\xi(\alpha-\mu_{11}\alpha\bar{\mu}_{11})\bar{\xi}=(\mu_{11}\alpha\bar{\mu}_{11})^{-1}.$$

如果 $\mu_{11}=1$，則(46)化为 $\xi+\bar{\xi}=(\mu_{11}\alpha\bar{\mu}_{11})^{-1}$；由公理 S 知这是可解的．如果 $\mu_{11}\neq 1$，作代換 $\xi=\eta^{-1}$，并以 $\eta$ 左乘及以 $\bar{\eta}$ 右乘，得

$$(47)\qquad \eta+\bar{\eta}+(\alpha-\mu_{11}\alpha\bar{\mu}_{11})=\eta(\mu_{11}\alpha\bar{\mu}_{11})^{-1}\bar{\eta}.$$

次以 $\eta=\zeta+\mu_{11}\alpha\bar{\mu}_{11}$ 代入，得

$$(48)\qquad \zeta(\mu_{11}\alpha\bar{\mu}_{11})^{-1}\bar{\zeta}=\alpha.$$

今 $\zeta=-\alpha\bar{\mu}_{11}$ 能适合(48)；所以 $\eta=(\mu_{11}-1)\alpha\bar{\mu}_{11}$（它不是0）适合(47)．于是 $\xi=\eta^{-1}$ 适合(46)．故(44)成立，而 $\beta_1$ 与 $\beta_2$ 是同步的．这就完成了証明．

令 $U$ 是 $\mathfrak{R}$ 到它自身上的一个1—1綫性变换，如果对于 $\mathfrak{R}$ 里每对向量 $x,y$，$g(xU,yU)=g(x,y)$ 成立，則 $U$ 叫做 $g$-**单式变换**．这个条件显然与要求 $UU'=1$ 等价，这里 $U'$ 是 $U$ 关于純量积的折轉．今再設 $\mathfrak{S}_1$ 与 $\mathfrak{S}_2$ 是非迷向空間，它們是 $g$-等价的，并且令 $M$ 是 $\mathfrak{S}_1$ 到 $\mathfrak{S}_2$ 上的一个 $g$-等价．由威特定理可求 $\mathfrak{S}_1^{\perp}$ 到 $\mathfrak{S}_2^{\perp}$ 上的一个等价 $N$．因为 $\mathfrak{R}=\mathfrak{S}_1\oplus\mathfrak{S}_1^{\perp}$，任意向量 $x$ 可有一个方法而且只有一个方法写成 $u+v$，这里 $u\in\mathfrak{S}_1$ 而 $v\in\mathfrak{S}_1^{\perp}$．于是，映照 $U: x\to uM+vN$ 是 $\mathfrak{R}$ 到它自身上的一个1—1綫性变换．再則，使用 $uM\in\mathfrak{S}_2$ 及 $vN\in\mathfrak{S}_2^{\perp}$ 的事实，我們可直接驗証 $U$ 是 $g$-单式变换．在子空間 $\mathfrak{S}_1$ 上，$U$ 显然与給定的等价 $M$ 重合．故知从威特定理可推得：非迷向子空間之間的任意 $g$-等价可扩张为一个 $g$-单式变换．我們今将証明这个結果对于 $\mathfrak{R}$ 的迷向子空間也是成立的．

先考虑 $\mathfrak{R}$ 的一个任意子空間 $\mathfrak{S}$．如果 $x$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意向量，則 $\mathfrak{S}$ 到 $\Delta$ 内的映照 $y\to g_x(y)\equiv g(y,x)$ 是一个綫性函数．我們易知

这样所得的綫性函数充满 $\mathfrak{S}$ 的共軛空間 $\mathfrak{S}^*$[1]. 所以,如果 $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 是 $\mathfrak{S}$ 的任意基,則可求一个向量 $v_1$, 使

$$(49) \qquad g(y_1, v_1) = 1, g(y_i, v_1) = 0 (i > 1).$$

今設 $\mathfrak{S}$ 是迷向的,而 $(y_1, y_2, \cdots, y_\nu)$是 $\mathfrak{S}$ 的根空間的一个基,則可取向量 $v_1$ 使(49)之外还有 $g(v_1, v_1) = 0$; 这可由用于威特定理的証明里的論証得出. 所以,如果 $v_1$ 不与它自身正交,則可用 $v_1 + \lambda y_1$ 代替这个向量,而选取 $\lambda$ 使 $\lambda + \bar{\lambda} + g(v_1, v_1) = 0$. 然后用 $v_1$ 表示这个新向量.

今空間$[y_1, v_1]$是$\mathfrak{R}$的一个二維非迷向子空間, 所以 $\mathfrak{R} = [y_1, v_1] \oplus [y_1, v_1]^\perp$. $[y_2, \cdots, y_m] \subseteq [y_1, v_1]^\perp$ 及 $[y_2, \cdots, y_\nu]$是$[y_2, \cdots, y_m]$的根空間也是显然的. 所以,我們可对于 $\nu$ 使用归納法来証明能使

$$(50) \qquad \begin{aligned} &g(y_j, v_j) = 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, \nu), \\ &g(y_i, v_j) = 0 \quad (\text{其余情形}), \\ &g(v_j, v_k) = 0 \quad (j, k = 1, 2, \cdots, \nu). \end{aligned}$$

的向量集合$(v_1, v_2, \cdots, v_\nu)$的存在. 我們易知,向量$(v_1, v_2, \cdots, v_\nu)$是綫性无关的,并且空間 $\mathfrak{B} = [v_1, v_2, \cdots, v_\nu]$ 是全迷向的,适合 $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{S} = 0$. 在 $\mathfrak{S} + \mathfrak{B}$ 里 $g$ 关于基 $(y_1, y_2, \cdots, y_m, v_1, v_2, \cdots, v_\nu)$ 的陣是

$$(51) \qquad \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \\ \hline 0 & B & 0 \\ \hline \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 & 0 \end{array}\right],$$

这里 $B$ 是关于 $(y_{\nu+1}, \cdots, y_m)$ 的陣. 因为$[y_1, \cdots, y_\nu]$ 是 $\mathfrak{S}$ 的根空間,所以 $B$ 是滿秩陣. 于是,(51)是滿秩陣,从而 $\mathfrak{S} + \mathfrak{B}$ 不是迷向的.

---

1) 参看习題 19 的第 2 題.

令合$U$是$\mathfrak{S}$(到$\mathfrak{S}U$上)的一个等价；显然$[y_1U,\cdots,y_\nu U]$是$\mathfrak{S}U$的根空間．所以可找到向量集合$(\bar{v}_1,\bar{v}_2,\cdots,\bar{v}_\nu)$使

$$g(y_jU,\bar{v}_j)=1\ (j=1,2,\cdots,\nu),$$
$$g(y_iU,\bar{v}_j)=0\ (\text{其余情形}),$$
$$g(\bar{v}_j,\bar{v}_k)=0\ (j,k=1,2,\cdots,\nu).$$

显然把$v_j$映到$\bar{v}_j$且在$\mathfrak{S}$上与$U$重合的綫性变换是$\mathfrak{S}+\mathfrak{V}$的一个等价．因为$\mathfrak{S}+\mathfrak{V}$不是迷向的，所以这个映照可扩张为一个$g$-单式变换．因此我們把下面的定理証明了．

**定理 8.** $\mathfrak{R}$的一个子空間的任意$g$-等价可擴張为$\mathfrak{R}$里一个$g$-單式變換[1]．

如果对于$\mathfrak{R}$里每个$x\neq 0$有$g(x,x)\neq 0$，则厄米特純量积叫做全正則的．这等价于說：$\mathfrak{R}$的每个非零子空間不是迷向的．所以，如果$g$是全正則的，并且$\mathfrak{S}$是任意子空間，則$\mathfrak{R}=\mathfrak{S}\oplus\mathfrak{S}^{\perp}$．今将証明：厄米特陣的同步性問題可化簡为相伴的純量积是全正則的情形来討論．

令$\mathfrak{S}$是$\mathfrak{R}$的一个极大的全迷向子空間，亦即它不能嵌入較大的这类型子空間里．記$\mathfrak{S}=[y_1,\cdots,y_\nu]$，这里$y_i$是綫性无关的．我們如前决定一个全迷向空間$\mathfrak{V}=[v_1,v_2,\cdots,v_\nu]$使$\mathfrak{X}=\mathfrak{S}+\mathfrak{V}=\mathfrak{S}\oplus\mathfrak{V}$，并且使$g$关于$\mathfrak{X}$的基$(y_1,\cdots,y_\nu,v_1,\cdots,v_\nu)$的陣是

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & 0 \end{array}\right]. \tag{52}$$

因为$\mathfrak{S}$是一个极大的全迷向子空間，并且$\mathfrak{R}=\mathfrak{S}\oplus\mathfrak{V}\oplus\mathfrak{X}^{\perp}$，所以$g$在$\mathfrak{X}^{\perp}$里是全正則的．我們可选取$\mathfrak{R}$的一个基，使$g$的陣的形状是

1) 参看狄佑当納 (Dieudonné) 著关于典型羣 (“Sur Les Groupes Classiques”)，第 18 頁．

$$
(53)\qquad \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & 0 \\ \hline \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & B \end{array}\right],
$$

这里 $B$ 是 $g$ 在 $\mathfrak{X}^{\perp}$ 里的陣．故任意厄米特陣与一个形状如(53)的陣是同步的，其中 $B$ 是全正則陣块（亦即，相伴的純量积是全正則的）．

反过来，設有 $g$ 的任意陣的形状如(53)，其中 $B$ 是全正則的．令 $(y_1,\cdots,y_\nu,v_1,\cdots,v_\nu,z_1,\cdots,z_{n-2\nu})$ 是一个基能使 $g$ 关于这个基的陣是給定的陣(53)，則 $\mathfrak{S}=[y_1,\cdots,y_\nu]$ 是全迷向的．还有 $\mathfrak{S}$ 是极大全迷向的；这因为，如果有一个更大的全迷向子空間含有 $\mathfrak{S}$，則它含有形状如 $v+z$ 的一个非零向量，这里 $v\in[v_1,\cdots,v_\nu]$ 而 $z\in[z_1,\cdots,z_{n-2\nu}]$．于是，$g(v+z,v+z)=g(z,z)=0$，而 $z=0$．如果 $v=\sum\gamma_i v_i$，則 $g(v,y_i)=\gamma_i$．所以也有 $v=0$，这与 $v+z\neq 0$ 矛盾．

在这里我們要証：形状如(53)的两个陣（其中 $B$ 是全正則的）是同步的必須而且只須陣 $B$ 是同步的．"必須"部分是明显的，而前面的討論指出这"只須"部分等价于說：如同上面由一个极大的全迷向子空間 $\mathfrak{S}$ 所决定的空間 $\mathfrak{X}^{\perp}$ 是 $g$-等价的．

我們先考察有相同維数的任意两个极大的全迷向子空間．譬如令 $\mathfrak{S}_1$ 与 $\mathfrak{S}_2$ 是这个类型的子空間，并設 $\dim\mathfrak{S}_1\geqslant\dim\mathfrak{S}_2$．則可求得 $\mathfrak{S}_1$ 的一个子空間 $\mathfrak{U}_1$ 使 $\dim\mathfrak{U}_1=\dim\mathfrak{S}_2$．因为 $\mathfrak{U}_1$ 与 $\mathfrak{S}_2$ 都是全迷向的，故 $\mathfrak{U}_1$ 到 $\mathfrak{S}_2$ 上的任意 1-1 綫性变换是一个 $g$-等价；所以它可扩张为一个单式变换 $U$．于是，$\mathfrak{S}_1U$ 是全迷向的，并且含有 $\mathfrak{U}_1U=\mathfrak{S}_2$．由 $\mathfrak{S}_2$ 的极大性就可推得 $\mathfrak{U}_1=\mathfrak{S}_1$，并且 $\dim\mathfrak{S}_1=\dim\mathfrak{S}_2$．

令 $\mathfrak{S}_i=[y_1^{(i)},\cdots,y_\nu^{(i)}]\,(i=1,2)$，并决定 $\mathfrak{B}_i=[v_1^{(i)},\cdots,v_\nu^{(i)}]$ 如前，使 $g$ 在 $\mathfrak{X}_i=\mathfrak{S}_i+\mathfrak{B}_i$ 里的陣是(52)．則 $\mathfrak{X}_1$ 与 $\mathfrak{X}_2$ 是 $g$-

等价的;于是,$\mathfrak{X}_1^\perp$ 与 $\mathfrak{X}_2^\perp$ 也是 $g$—等价的. 故建立了下面的定理.

**定理 9.** 任意滿秩厄米特陣必与一个(53)形狀的陣是同步的,其中 $B$ 是全正則的;(53)形狀的兩个陣(其中 $B$ 是全正則的)是同步的必須而且只須子陣 $B$ 是同步的.

陣 $B$ 的行及列数是同步类的一个不变数. 这个数目是空間 $\mathfrak{X}^\perp$ 的維数,并且也是 $n-2\nu$, 这里 $\nu$ 是关于 $g$ 的全迷向子空間的极大維数. 这个非負整数叫做 $g$ 的或相伴陣的**威特符号差**. 我們知道[1], 对于实数域上对称陣,或者对于复数域或实四維数上厄米特陣,威特符号差是前此定义的普通符号差的絕对值.

### 習 題 46

1. 証明前此关于符号差的命題.

2. 如果 $g$ 是一个交錯非退化的純量积,則能够使 $g(xS,yS)=g(x,y)$ 的 $\mathfrak{R}$ 的一个 1—1 綫性变换 $S$ 叫做**耦对变换**[2]. 証明定理 8 的类似定理: **$\mathfrak{R}$ 的一个子空間的任意 $g$-等价可扩张为一个耦对变换.**

***12. 非交錯斜称形式** 最后設 $g(x,y)$ 是一个斜称純量积,但不是交錯的,則 $\Phi$ 有特征数 2,而 $g(x,y)$ 也可看作对称的. 再則我們已知,如果 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基,則有某些 $i$ 使 $g(e_i,e_i)\neq 0$. 今将証: 我們能选取 $\mathfrak{R}$ 的一个基 $(u_1,u_2,\cdots,u_r,z_1,z_2,\cdots,z_{n-r})$ 使由这个基决定的陣是

$$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,0,0,\cdots,0\},$$

这里 $\beta_i\neq 0$. 显然可选取 $u_1$ 使 $g(u_1,u_1)=\beta_1\neq 0$. 今設已找到 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 使 $g(u_i,u_j)=\delta_{ij}\beta_i$, 这里 $\beta_i\neq 0$. 如同在定理 3 的証明里,我們可記 $\mathfrak{R}=\mathfrak{S}_k\oplus\mathfrak{R}F_k$, 这里 $\mathfrak{S}_k=[u_1,u_2,\cdots,u_k]$, 而 $\mathfrak{R}F_k\subseteq\mathfrak{S}_k^\perp$. 如果在 $\mathfrak{R}F_k$ 里 $g(x,y)$ 恆等于 0, 則命 $k=r$, 并于 $\mathfrak{R}F_k$ 里选取一个基 $(z_1,z_2,\cdots,z_{n-r})$. 如果 $g(x,y)$ 在 $\mathfrak{R}F_k$ 里不是交錯的, 則在这个子空間里可选取一个向量 $u_{k+1}$ 使 $g(u_{k+1},u_{k+1})=\beta_{k+1}\neq 0$. 然后就这 $k+1$ 个 $u$ 重复上面的論証. 我們还要考慮

---

1) 参看上面习題 46 的第 1 題.

2) 耦对变换也譯作辛变换——譯者注.

$g(x,y)$在$\mathfrak{R}E_k$里不恆等于0并且是交錯的情形. 此时可求得两个綫性无关的向量$v,w$使

$$g(v,v)=0=g(w,w),g(v,w)=1=g(w,v).$$

今令$u=u_k,\beta=\beta_k$,并且考虑三維空間$[u,v,w]$里的純量积. 使用这些向量为基,得陣

$$\begin{bmatrix}\beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

所以, 如果 $y=\xi u+\eta v+\zeta w$, 及 $y'=\xi' u+\eta' v+\zeta' w$, 則 $g(y,y')=\beta\xi\xi'+\eta\zeta'+\eta'\zeta$. 于是,下面的向量

$$y_1=u+v,$$

$$y_2=u+\beta w,$$

$$y_3=u+v+\beta w.$$

是两两正交,并且适合$g(y_i,y_i)=\beta$. 故知,如果用$y_1$代替原来的$u_k$,并把这个向量仍旧叫做$u_k$, 則$u_1,u_2,\cdots,u_k,u_{k+1}=y_2,u_{k+2}=y_3$适合$g(u_i,u_j)=\delta_{ij}\beta_i$,这里$\beta_i\neq 0$. 这証明了以下定理.

**定理 10.** 如果$\Phi$有特徵數2, 而$g(x,y)$是$\Phi$上$\mathfrak{R}$里一个非交錯对称純量積,則$\mathfrak{R}$有一个基存在,關于这个基, $g(x,y)$的陣是一个对角陣[1].

用于証明前定理的論証指出:陣

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

是同步的. 另一方面,这些子陣

1) 在这个定理里給出的典型形式是有用的,因为它簡化特征数2的域上对称陣的陣計算. 在特征数2的情形,对称純量积的較多几何方面討論曾在狄佑当納著的关于典型羣("Sur Les Groupes Classiques")的第62頁上指出.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

不是同步的. 这些观察指出: 威特定理在特征数为 2 的情形不成立.

# 第 六 章

# 欧几里得空間及单式空間

我們在本卷的开端曾指出欧几里得几何学是論述一个实向量空間关于純量积 $\sum_{1}^{n} \xi_i\eta_i$ 的研究，而純量积是通过互相正交的基单位向量把 $x, y$ 列出如 $x = \Sigma\xi_i u_i$, $y = \Sigma\eta_i u_i$ 所决定的．因为这个純量积是固定的，习惯上就只用 $(x, y)$ 来表示，以代替前章里的 $g(x, y)$．$(x, y)$ 的几何意义是显然的．它給出 $x$ 及 $y$ 間夹角的余弦与这两个向量的长度的积．$x$ 的长度也可由純量积列出，即 $|x| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$．

从当前观点来說，$(x, y)$ 的特征性質是：这个函数是正定的，亦即对于所有 $x \neq 0$，$(x, x) > 0$．事实上，近时常把欧几里得几何学公理化如次．設 $\mathfrak{R}$ 是实数域上有限維向量空間，并在 $\mathfrak{R}$ 里取一个正定的对称純量积 $(x, y)$．$\Phi$ 上空間 $\mathfrak{R}$ 并这个基本純量积构成**欧几里得空間**．仿此，我們定义与欧几里得空間相类似的复空間为复数域上一个向量空間，并在这个空間里取一个正定的厄米特純量积．我們在本章里研究这些空間的性質及在这些空間里某些特殊类型的綫性变换的性質．我們还簡单地論述陣(或綫性变换)的分析函数的理論．

**1. 笛卡儿基** 令 $\mathfrak{R}$ 是一个欧几里得空間，亦即 $\mathfrak{R}$ 是实数域 $\Phi$ 上一个 $n$ 維向量空間，并在其中定义一个正定的对称純量积 $(x,y)$．所以，这个实値函数的根本性質是

$$(1)\quad \begin{aligned}(x_1 + x_2, y) &= (x_1, y) + (x_2, y),\\ (x, y_1 + y_2) &= (x, y_1) + (x, y_2),\end{aligned}$$

$$(2)\quad (\alpha x, y) = \alpha(x, y) = (x, \alpha y),$$

(3) $$(x, y) = (y, x),$$

(4) $$(x,x) > 0 \quad (\text{如果 } x \neq 0).$$

但我們知道,如果$(x, y)$是实向量空間里任意对称純量积,則有一个基$(u_1, u_2, \cdots, u_n)$存在使$(u_i, u_j) = \delta_{ij}\beta_j$,这里$\beta_i$是1,−1,或0. 如果$(x, y)$是正定的,显然每个$\beta_i = 1$. 故知$\mathfrak{R}$存在有一个基$(u_1, u_2, \cdots, u_n)$使

(5) $$(u_i, u_j) = \delta_{ij}.$$

所以,如果$x = \sum \xi_i u_i$, $y = \sum \eta_i u_i$,則得通常的

$$(x, y) = \sum \xi_i \eta_i.$$

适合(5)的基叫做欧几里得空間的**笛卡儿基**,拉格兰日的决定这样一个基的方法可容許作某些改进如次. 令$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$是$\mathfrak{R}$的任意一个基,則$(e_1, e_1) > 0$. 所以,如果$u_1 = (e_1, e_1)^{-\frac{1}{2}} e_1$,則$(u_1, u_1) = 1$,次应用拉格兰日的化簡法,并命

$$f_2 = e_2 - (e_2, u_1)u_1.$$

則$(f_2, u_1) = (e_2, u_1) - (e_2, u_1)(u_1, u_1) = 0$. 所以$u_1$及$u_2 = (f_2, f_2)^{-\frac{1}{2}} f_2$适合

$$(u_1, u_1) = 1 = (u_2, u_2), \quad (u_1, u_2) = 0 = (u_2, u_1).$$

今設曾經决定了$(u_1, u_2, \cdots, u_k)$使$(u_i, u_j) = \delta_{ij}$,并且在$i \leqslant k$时$[u_1, u_2, \cdots, u_i] = (e_1, e_2, \cdots e_i)$. 令

$$f_{k+1} = e_{k+1} - (e_{k+1}, u_1)u_1 - (e_{k+1}, u_2)u_2 - \cdots - (e_{k+1}, u_k)u_k,$$

則$(f_{k+1}, u_i) = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$. 所以,如果命$u_{k+1} = (f_{k+1}, f_{k+1})^{-\frac{1}{2}} f_{k+1}$,則$(u_1, u_2, \cdots, u_{k+1})$适合对于$(u_1, u_2, \cdots, u_k)$所說的条件. 重复这个方法直到得出$\mathfrak{R}$的笛卡儿基为止. 上面給出的"正交化"基$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$的方法常叫做**E. 栜密特的正交化法**.

这里値得一提的是: $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$关于$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$的陣是三角陣;这因为,$[u_1, u_2, \cdots, u_i] = [e_1, e_2, \cdots, e_i]$. 所以$u_i$是$e_j$的綫性組合,这里$j \leqslant i$. 因此,$u_i = \sum_{j=1}^{i} \tau_{ij} e_j$,而$u$关于$e$的陣是

$$(6)\qquad (\tau)=\begin{bmatrix}\tau_{11} & & & 0\\ \tau_{21} & \tau_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn}\end{bmatrix}.$$

如果 $(\beta)$ 是 $(x, y)$ 关于原来选定的基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣，則知 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 的陣是 $(\tau)(\beta)(\tau)'$. 另一方面，由 (5) 知后者的陣应該是恆等陣；所以有 $(\tau)(\beta)(\tau)'=1$. $(\tau)$ 的逆陣也是三角陣与 $(\tau)$ 的形状相同，并且 $(\beta)=(\nu)(\nu)'$. 这就証明了下面的定理.

**定理 1.** 令 $(\beta)$ 是一个正定的对称純量積的陣，則有一个三角陣 $(\nu)$ 存在使 $(\beta)=(\nu)(\nu)'$.

今讲述笛卡儿基与陣之間的关系. 令 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是一定的笛卡儿基. 如果 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 是另一个这样的基，則 $(x,y)$ 关于这两个基的陣是 1. 所以，如果 $(\sigma)$ 是 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 关于 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 的陣，則 $(\sigma)(\sigma)'=1$. 适合条件

$$(7)\qquad (\sigma)(\sigma)'=1$$

的陣叫做**正交陣**. 反过来，如果 $(\sigma)$ 是任意正交陣，而 $u_i=\sum\sigma_{ij}v_j$，則 $(x, y)$ 关于 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 的陣是 $(\sigma)1(\sigma)'=1$. 所以，这些 $u$ 构成一个笛卡儿基. 故知，如果已知一个笛卡儿基，則所有其他笛卡儿基可由施用正交陣于这个基而得出. 故笛卡儿基与正交陣之間有一个 1—1 对应.

如果 $(\sigma)$ 是正交陣，則 $(\det(\sigma))^2=1$；所以，$\det(\sigma)=\pm 1$. 如果 $\det(\sigma)=1$，就說 $(\sigma)$ 是**眞正交陣**；否則說 $(\sigma)$ 是**假正交陣**. 正交陣构成羣 $L(\Phi, n)$ 的一个子羣 $O(\Phi, n)$ 是容易驗証的. 眞正交陣在 $O(\Phi, n)$ 里构成一个不变子羣 $O_1(\Phi, n)$，而 $O_1$ 在 $O$ 里的指标是 2.

如果两个笛卡儿基由一个眞正交陣联系着，則說这两个基有**同定向**；如果是由假正交陣联系着，則說它們有**反定向**. 于是，笛卡儿基对于一个特殊笛卡儿基可分为互不相容的两类，就是与这个特殊基同定向及反定向两类. 改变一个向量的符号或施奇排列

于各向量則改变了定向.

再設 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是任意基,幷令 $(\gamma)$ 是这个基关于笛卡儿基 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 的陣. 因为这些 $e$ 构成一个任意基,所以陣 $(\gamma)$ 是 $L(\Phi, n)$ 里一个任意陣. 但我們已知有一个笛卡儿基 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 存在,它关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣是一个三角陣 $(\tau)$; 所以, $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 关于 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 的陣是积 $(\tau)(\gamma)$. 因为 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 是笛卡儿基,所以 $(\tau)(\gamma) = (\sigma)$ 是正交陣. 故得下面的定理.

**定理 2.** 如果 $(\gamma) \in L(\Phi, n)$, 这里 $\Phi$ 是实數域, 則 $(\gamma)$ 可分解为 $(\nu)(\sigma)$, 这里 $(\nu)$ 是三角陣, 而 $(\sigma)$ 是正交陣.

### 習 題 47

1. 証明: 定理 2 里的陣 $(\nu)$ 可取为有正对角元素的陣. 証明: 如果这样正規化后, 則 $(\nu)$ 与 $(\sigma)$ 可由 $(\gamma)$ 唯一决定.

2. 分解

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为一个三角陣与一个正交陣的积.

3. 証明: 如果 $(\beta)$ 是正定的对称純量积的陣, 則 $\det(\beta) > 0$. 把这个結果推广, 用以証明 $(\beta)$ 的每个对角子式是正的.

4. 証明: 如果 $(x, y)$ 是一个正定的对称純量积, 則对于任意的 $u$ 与 $v$ 有 $(u, v)^2 \leqslant (u, u)(v, v)$; 并証明 $u$ 与 $v$ 是綫性相关时, 則等式成立.

5. 对于向量的长度証明三角形不等式:

$$(u+v, u+v)^{1/2} \leqslant (u, u)^{1/2} + (v, v)^{1/2}.$$

**2. 綫性变换与純量积** 如果 $A$ 是 $\Phi$ 上空間 $\mathfrak{R}$ 到它自身內的一个綫性变换, 則 $g(x, y) \doteq (xA, y)$ 是空間里另一个純量积. 反过来, 令 $g(x, y)$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意純量积, 如果保持 $x$ 固定, 則函数 $g(x, y)$ 是 $y$ 的綫性函数. 所以, 也象第五章里証明的, $\mathfrak{R}$ 里有唯一决定的向量 $xA$ 存在, 使对于所有 $y$, $g(x, y) = (xA, y)$. 映照 $A$ 是綫性的. 这指出: $\mathfrak{R}$ 里任意純量积可按上面方式使用一个綫性变换 $A$ 而从基本純量积 $(x, y)$ 得出. 故 $\mathfrak{R}$ 里純量积理論等价于 $\mathfrak{R}$ 里綫性变换理論.

此后我們大部分都采取綫性变换的观点．首先講到綫性变换 $A$ 的关于 $(x, y)$ 的摺轉 $A'$ 的定义：$A'$ 是 $\mathfrak{R}$ 里綫性变换，它对于 $\mathfrak{R}$ 里所有的 $x, y$ 适合条件

$$(x, yA') = (xA, y). \tag{8}$$

适合这个条件的綫性变换只有一个，而且对于一个基 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$，(8) 可化为 $n^2$ 个方程

$$(u_i, u_jA') = (u_iA, u_j) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

如果这个基是笛卡儿基，則这些条件可推得 $A'$ 是綫性变换，它关于 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 的陣是 $A$ 的陣的折轉．如果

$$u_iA = \sum \alpha_{ik}u_k \text{ 及 } u_jA' = \sum \beta_{jl}u_l,$$

則

$$(u_i, u_jA') = \sum \beta_{jl}(u_i, u_l) = \beta_{ji},$$

$$(u_iA, u_j) = \sum \alpha_{ik}(u_k, u_j) = \alpha_{ij}.$$

所以 $(\beta) = (\alpha)'$[1]．

我們知道，映照 $A \to A'$ 的基本代数性質是

$$(A + B)' = A' + B', \quad (AB)' = B'A'.$$

由 (8) 及 $(x, y)$ 的对称性显然还有

$$A'' = A.$$

**3. 正交完全可約性**　如果 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的任意非零子空間，則 $(x, y)$ 是 $\mathfrak{S}$ 里非退化的純量积．事实上，如果 $x \neq 0$，則 $(x, y) \neq 0$．由此知，$\mathfrak{S}$ 的正交余空間 $\mathfrak{S}^\perp$ 是一个眞的余空間，亦即 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{S}^\perp$[2]．我們容易决定 $\mathfrak{S}^\perp$ 的一个基．要达到这个目的，需要有 $\mathfrak{S}$ 的一个笛卡儿基 $(u_1, u_2, \cdots, u_r)$．这个基可补充成为 $\mathfrak{R}$ 的一个基 $(u_1, u_2, \cdots, u_r; e_{r+1}, \cdots, e_n)$．于是，权密特的正交化方法給出笛卡儿基 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$，并且显見 $\mathfrak{S}^\perp = (u_{r+1}, u_{r+2}, \cdots, u_n)$．

今設 $\Omega$ 是 $\Phi$ 上 $\mathfrak{R}$ 里綫性变换的一个任意集合．如果在 $\Omega$ 下不变的任意子空間 $\mathfrak{S}$ 的正交余空間 $\mathfrak{S}^\perp$ 在 $\Omega$ 下也是不变的，則 $\Omega$ 叫做**正交完全可約的**．因为 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{S}^\perp$，所以从正交完全可約性显

---

1) 参看第五章，§4 的末段．
2) 参看第五章，§7．

然可推得通常完全可約性. 我們将要知道,$\mathfrak{R}$ 里許多重要类型的綫性变换都具有这个性質. 如果 $\Omega$ 是正交完全可約的,则可把 $\mathfrak{R}$ 分解为关于 $\Omega$ 不变与不可約的同时又是互相正交的子空間的直接和 $\mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_t$. 故令 $\mathfrak{R}_1$ 是关于 $\Omega$ 的一个不可約的不变子空間,则 $\mathfrak{R}_1^\perp$ 是不变的,而且 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_1^\perp$. 令 $\mathfrak{R}_2$ 是含于 $\mathfrak{R}_1^\perp$ 里的一个不可約的不变子空間, 则 $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2$ 而这两个空間是正交的. 于是,我們可写 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)^\perp$. 这样继續下去,即得所求的分解.

这里有极有用的正交完全可約性检驗法, 它是基于下面的定理.

**定理 3.** 如果 $\Omega$ 是綫性變換的任意集合, 而 $\mathfrak{S}$ 在 $\Omega$ 下是不變的,則正交余空間 $\mathfrak{S}^\perp$ 在 $\Omega'$ 下是不變的, 这里 $\Omega'$ 是 $\Omega$ 里綫性變換的折轉的集合.

証 令 $x \in \mathfrak{S}$ 及 $y \in \mathfrak{S}^\perp$, 則对于 $\Omega$ 里任意的 $A$ 有 $xA \in \mathfrak{S}$. 于是 $(xA, y) = 0$, 并且还有 $(x, yA') = 0$. 因为这对于所有 $x \in \mathfrak{S}$ 成立,故 $yA' \in \mathfrak{S}^\perp$ 因为 $y$ 是 $\mathfrak{S}^\perp$ 里任意向量,这証明 $\mathfrak{S}^\perp$ 在 $\Omega'$ 下不变.

至此可述下面重要的判断准則:

**系.** 集合 $\Omega$ 是正交完全可約的, 必須而且只須 $\Omega$ 与 $\Omega'$ 有相同的不變子空間.

**4. 对称、斜称及正交綫性变换** 欧几里得几何学里特别有趣的綫性变换有下面几种类型: 由条件 $A' = A$ 来定义的对称变换, 由 $A' = -A$ 来定义的斜称变换,及由 $A' = A^{-1}$ 来定义的正交变换. 这些条件也可由相伴的純量积給出. 譬如, $A$ 是对称的必須而且只須 $(xA, y)$ 是对称的,这是容易驗証的. 同样, $A$ 是斜称的必須而且只須 $(xA, y)$ 是 $\mathfrak{R}$ 里斜称純量积. 如果 $(\alpha)$ 是 $A$ 关于笛卡儿基 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 的陣, 则 $A$ 是对称 (斜称) 的必須而且只須 $(\alpha)$ 是对称(斜称)的.

要知道正交綫性变换的几何意义必須提到: $(u, u)$ 給出向量 $u$ 的长度的平方. 条件 $AA' = 1 = A'A$ 可推得

(9) $$(uA, uA) = (u, uAA') = (u, u).$$

于是，$A$ 保持任意向量的长度不变．今来証明逆定理，亦即：如果 $A$ 是使每个向量的长度不变的任意綫性变换，则 $A$ 是正交的．这因为，如果 (9) 对于所有 $u$ 成立，则对于所有的 $x$，与 $y$，

$$((x+y)A, (x+y)A) = (x+y, x+y).$$

展开后并把相等的項消掉，得

$$2(xA, yA) = 2(x, y).$$

所以对于所有的 $x, y$，$(x, yAA') = (x, y)$．因为 $(x, y)$ 是非退化的，这可推得 $AA' = 1$．

$A$ 是正交的显然必須而且只須它关于笛卡儿基的陣 $(\alpha)$ 是正交的．这个結果的另一个說法如次：$A$ 是正交的必須而且只須笛卡儿基 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 的变换 $(u_1A, u_2A, \cdots, u_nA)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个笛卡儿基．陣 $(\alpha)$ 的行列式是 1 或 $-1$．在前一种情形，$(u_1A, u_2A, \cdots, u_nA)$ 与 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 有同定向，此时 $A$ 叫做 $\mathfrak{R}$ 里的旋轉．

**5. 对称及斜称綫性变换的典型陣** 如果 $\mathfrak{S}$ 是在对称綫性变换下不变的一个子空間，则 $\mathfrak{S}$ 显然在 $A'$ 下是不变的．于是单独由 $A$ 构成的集合是正交完全可約的．故上面关于正交完全可約的集合的討論提供求 $A$ 的一个典型陣的下列方法．

令 $x$ 是 $\mathfrak{R}$ 里一个非零向量，并令 $\mu_x(\lambda)$ 是它的指导多項式[1]．如果 $\pi(\lambda)$ 是 $\mu_x(\lambda)$ 的一个不可約因子（其首項系数是 1），而 $\mu_x(\lambda) = \pi(\lambda)\nu(\lambda)$，则 $y = x\nu(A)$ 有指导多項式 $\pi(\lambda)$．因为 $\Phi$ 是实数域，所以不可約多項式 $\pi(\lambda)$ 是一次多項式或二次多項式．今将証明：$A$ 的对称性保証 $\pi(\lambda)$ 是一次的．否则，$(y, yA)$ 是循环空間 $\{y\}$ 的一个基，而这个基产生陣

(10) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

这里，$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = \pi(\lambda)$．另一方面，如果在 $\{y\}$ 里选一个笛卡

1) 参看第三章，§2．

儿基，则得 $\{y\}$ 里 $A$ 的一个对称陣

$$(11) \qquad \begin{bmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

因为(10)与(11)是相似陣，故

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = \lambda^2 - (\gamma + \varepsilon)\lambda + (\gamma\varepsilon - \delta^2).$$

这个二次式的判别式是

$$(\gamma + \varepsilon)^2 - 4(\gamma\varepsilon - \delta^2) = (\gamma - \varepsilon)^2 + 4\delta^2 \geqslant 0,$$

这与 $\pi(\lambda)$ 的不可約性矛盾．故知 $\pi(\lambda)$ 必定是一次的，因此 $\{y\} = [y]$ 是一維空間，而 $yA = \rho y$.

今以长度为 1 的向量 $y_1$ 的倍数代替 $y$，则 $y_1A = \rho_1y_1$，而 $\rho_1 \equiv \rho$. 又 $\Re = [y_1] \oplus [y_1]^{\perp}$，而 $A$ 在 $[y_1]^{\perp}$ 里导出一个对称变换．所以，我們在 $[y_1]^{\perp}$ 里可找长度为 1 的一个 $y_2$，使 $y_2A = \rho_2y_2$. 其次，用分解 $\Re = [y_1, y_2] + [y_1, y_2]^{\perp}$ 在 $[y_1, y_2]^{\perp}$ 里找长度为 1 的一个 $y_3$，使 $y_3A = \rho_3y_3$. 我們知道，这样得来的 $y_i$ 是两两正交的；故在进行終止时，就得到一个笛卡儿基 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$. 由这个基所决定的 $A$ 的陣是

$$(12) \qquad \operatorname{diag}\{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n\}.$$

如果回忆到从一个笛卡儿基过渡到另一个笛卡儿基的陣是一个正交陣，則知下面的定理是成立的．

**定理 4.** 如果 $(\alpha)$ 是一个实对称陣，則有一个实正交陣 $(\sigma)$ 存在使 $(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$ 是一个对角陣．

我們还可安排使 $(\sigma)$ 是眞正交陣．这可由在必要时改变 $y_i$ 中的一个向量的符号而实現．我們还知道典型陣 (12) 里的 $\rho_i$ 是这个陣的特征多項式的根．所以，它們也是 $(\alpha)$ 的特征多項式的根．因此很湊巧地証明了下面的系．

**系.** 实对称陣的特征根都是实數．

今来叙述欧几里得空間里斜称綫性变换的理論．令 $A$ 是斜称綫性变换，并且与上面一样，令 $y$ 是一个非零向量，它的指导多項式是一个不可約多項式 $\pi(\lambda)$. 如果 $\pi(\lambda)$ 是一次的，則 $yA = \rho y$. 于是，$\rho(y, y) = (yA, y) = -(y, yA) = -\rho(y, y)$，而这可推

得 $\rho = 0$. 如果 $\pi(\lambda)$ 是二次的，则在 $\{y\}$ 里选取一个笛卡儿基；于是，得一个斜称陣

$$\begin{bmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{bmatrix}.$$

多項式 $\pi(\lambda)$ 是这个陣的特征多項式. 所以，$\pi(\lambda) = \lambda^2 + \delta^2$，这里 $\delta \neq 0$. 如果使用在对称映照里用过的方法，則可把空間分解为互相正交的空間 $\mathfrak{S}_i (i = 1, 2, \cdots, h)$ 的直接和，使每个 $\mathfrak{S}_i = \{y_i\}$，而 $y_i$ 的最低多項式 $\pi_i(\lambda)$ 是 $\lambda$，或者是 $\lambda^2 + \delta_i^2$ 的形状，这里 $\delta_i \neq 0$. 我們可安排 $\mathfrak{S}_i$ 使 $\pi_i(\lambda) = \lambda^2 + \delta_i^2 (i = 1, 2, \cdots, k)$，而在 $i > k$ 时 $\pi_i(\lambda) = \lambda$. 如果在 $\mathfrak{S}_i$ 里选取笛卡儿基，而把这些基合攏起来，就得 $\mathfrak{R}$ 的一个笛卡儿基. $A$ 关于这个基的陣是

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & \delta_1 \\ -\delta_1 & 0 \end{matrix}} & & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & \delta_2 \\ -\delta_2 & 0 \end{matrix}} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & \delta_k \\ -\delta_k & 0 \end{matrix}} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

这証明了下面的定理

**定理 5.** 如果 $(\alpha)$ 是一个实斜称陣，則有一个实正交陣 $(\sigma)$ 存在使 $(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$ 的形狀为(13).

如同对称陣一样，$(\alpha)$ 的典型形式是由它的特征多項式

$$\lambda^{n-2k} \prod_{1}^{k} (\lambda^2 + \delta_i^2), \quad (\delta_i \neq 0)$$

所完全决定. 我們还注意到，此时特征根都是純虛数.

**習 題 48**

1. 如果

$$(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix},$$

求一个眞正交陣 $(\sigma)$ 使 $(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$ 是对角陣.

2. 証明：如果 $g(x, y)$ 是欧几里得空間里一个对称純量积，則有 $\mathfrak{R}$ 的一个笛卡儿基存在使 $g$ 关于这个基的陣是对角陣.

3. 証明：如果 $(\alpha)$ 是 $\rho$ 秩的一个实对称陣或斜称陣，則 $(\alpha)$ 里有一个非零的 $\rho$-行对角子式存在.

**6. 交换的对称及斜称綫性变换** 如果 $\rho$ 是对称綫性变换 $A$ 的特征多項式 $f(\lambda)$ 的一个根，則使 $yA=\rho y$ 的向量 $y$ 的子空間 $\mathfrak{R}_{\lambda-\rho}\neq 0$；这个子空間叫做对应于 $f(\lambda)$ 的根 $\rho$ 或因子 $\lambda-\rho$ 的**特征空間**. 如果 $A$ 是斜称的，而 $\lambda$ 是 $f(\lambda)$ 的一个因子，則也仿此定义特征空間 $\mathfrak{R}_{\lambda}$. $f(\lambda)$ 的其它不可約因子的形状为 $\pi(\lambda)=\lambda^2+\delta^2$，这里 $\delta\neq 0$；对应于这样一个因子，我們定义**特征空間** $\mathfrak{R}_{\pi(\lambda)}$ 为使 $y\pi(A)=0$ 的向量 $y$ 的全体. 在前节里已知 $\mathfrak{R}_{\pi(\lambda)}\neq 0$.

如果 $B$ 是与 $A$ 可交换的任意綫性变换，显然 $B$ 把 $A$ 的每个特征空間映到它自身内. 这因为，由 $y\pi(A)=0$ 显然可推得 $y\pi(A)B=(yB)\pi(A)=0$.[1]

今令 $\Omega$ 是綫性变换的一个集合，它具有这样的性质：1) $\Omega$ 里任意两个綫性变换都是可交换的，2) $\Omega$ 里每个变换或是对称的，或是斜称的. 要决定集合 $\Omega$ 的典型陣，先考虑 $\Omega$ 是一个不可約集合的情形. 我們要建立的結果是下面的定理.

**定理 6.** 如果欧几里得空間 $\mathfrak{R}$ 關于交换的对称或斜称綫性變换的集合是不可約的，則 $\dim\mathfrak{R}\leqslant 2$.

証. 令 $\pi(\lambda)$ 是任意 $A\in\Omega$ 的特征多項式的一个不可約因子，則 $A$ 的特征空間 $\mathfrak{R}_{\pi(\lambda)}$ 关于 $\Omega$ 是不变的. 所以，$\mathfrak{R}_{\pi(\lambda)}=\mathfrak{R}$；因此 $\pi(A)=0$. 如果 $A$ 是对称变换，則知 $\pi(\lambda)=\lambda-\rho$；故在这个情形，$A$ 是一个純量乘法. 如果 $A$ 是斜称变换，則或是 $\pi(\lambda)=\lambda$，此时 $A=0$；或是 $\pi(\lambda)=\lambda^2+\delta^2$（这里 $\delta\neq 0$）此时 $A^2=-\delta^2 1$，于是，$A^{-1}$ 存在，并且是斜称变换. 所以，如果 $B$ 是集合里任意其

---

1) 这里出現的观念的更一般形状已在第四章的 §9 里討論过.

它斜称变换，则

$$M = BA^{-1} = A^{-1}B = (-A^{-1})'(-B') = (A^{-1})'B' = M'$$

是对称变换. 因为$M$与$\Omega$里每个元素可交换，所以，前面使用的論証指出$M$是一个純量乘法. 于是，$B = \mu A$. 故知集合$\Omega$或是只由純量乘法构成，或是由純量乘法及这个集合里单一斜称变换$A$的倍数构成. 在前者情形，$\mathfrak{R}$的每个子空間关于$\Omega$是不变的；所以，由$\mathfrak{R}$的不可約性得$\dim \mathfrak{R} = 1$. 在后者情形，可求一个二維子空間，它关于选定的斜称变换$A$是不变的，并且是不可約的. 显然这个空間关于$\Omega$里每个元素也是不变的. 所以，此时有$\dim \mathfrak{R} = 2$. 这就完成了定理的証明.

今設$\Omega$是欧几里得空間里交换的对称或斜称綫性变换的一个任意集合. 由定理3的系显然知，对称及斜称綫性变换的每个集合是正交完全可約的. 由此推得：我們可記$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{S}_h$，这里$\mathfrak{S}_i$是互相正交的，并且关于$\Omega$是不可約的与不变的. 至此可应用定理6以推出：空間$\mathfrak{S}_i$是一維或二維的. 再則，定理6的証明指出：对称綫性变换$A$是$\mathfrak{S}_i$里純量乘法，而斜称綫性变换$A$是一个特殊斜称变换的倍数. 如果在$\mathfrak{S}_i$里选取笛卡儿基，則得$\mathfrak{R}$的一个笛卡儿基，$\Omega$里所有$A$关于这个基的陣都具

$$\begin{bmatrix} (\beta_1) & & & \\ & (\beta_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\beta_n) \end{bmatrix} \tag{14}$$

的形状，这里$(\beta_i)$是一行或二行純量陣，或是

$$(\beta_i) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_i \\ -\varepsilon_i & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

就陣方面来説，我們的結果是下面的定理.

**定理 7.** 令$\omega$是可交换的对称或斜称的实陣的集合，則有一个实正交陣$(\sigma)$存在使对于每个$(\alpha) \in \omega$，$(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$的形狀为(14).

**習 題 49**

1. 証明：如果$A$是对称綫性变换，則$A$的任意两个不同的特征空間是正交的；并

證明：$\mathfrak{R}$ 是关于 $A$ 的特征子空間的直接和.

2. 證明：如果 $\omega$ 是可交換的实对称陣的集合，則有一个实对称陣 $(\delta)$ 存在，使每个 $(\alpha)\in\omega$ 是 $(\delta)$ 里一个多項式.

**7. 正規及正交綫性变換** 如果一个綫性变換 $A$ 可与它的折轉变換交換，則 $A$ 叫做**正規綫性变換**. 这种映照的特殊情形是对称、斜称及正交綫性变換. 如果 $A$ 是任意綫性变換，則可写成

$$A=\frac{1}{2}(A+A')+\frac{1}{2}(A-A')=B+C.$$

这里 $B=\frac{1}{2}(A+A')$ 是对称綫性变換，而 $C=\frac{1}{2}(A-A')$ 是斜称綫性变換. 这种分解为对称与斜称部分的分解法是唯一的；这因为，如果 $B+C=B_1+C_1$，这里 $B_1'=B_1$ 而 $C_1'=C_1$，則

$$(B-B_1)=(C_1-C).$$

因为 $B-B_1$ 是对称的，而 $C_1-C$ 是斜称的，所以 $B-B_1=0=C_1-C$. 所以，我們可分別叫 $B$ 与 $C$ 做 $A$ 的**对称部分与斜称部分**. 現在要講的是：$A$ 是正規綫性变換必須而且只須 $B$ 与 $C$ 可交換，这因为 $B=\frac{1}{2}(A+A')$，$C=\frac{1}{2}(A-A')$ 而 $A=B+C$，$A'=B-C$ 的緣故. 这个說明指出：我們可应用可交換的对称及斜称綫性变換来研究正規綫性变換. 使用这个方法可知有一个笛卡儿基存在，关于这个基 $B$ 与 $C$ 的陣的形狀是(14). 因为 $B$ 是对称的，而 $C$ 是斜称的，故知：如果 $(\beta_i)$ 是一行的陣块，則 $C$ 的陣是 0；如果 $(\beta_i)$ 是两行的陣块，則 $C$ 的陣的形狀是(15)，而 $B$ 的陣是純量陣. $A=B+C$ 的陣是 $B$ 的陣与 $C$ 的陣之和. 所以，$A$ 的陣的形狀是(14)，这里每个 $(\beta_i)$ 是一行的或

$$(\beta_i)=\begin{bmatrix}\rho_i & \varepsilon_i\\ -\varepsilon_i & \rho_i\end{bmatrix}, \tag{16}$$

这里 $\varepsilon_i\neq 0$.

如果一个陣可与它的折轉陣交換，則叫做**正規陣**. 綫性变換 $A$ 是正規的必須而且只須它关于笛卡儿基的陣是正規的. 故由上面的討論得下面的定理.

**定理 8.** 如果$(\alpha)$是一个实正規陣，則有一个正交陣$(\sigma)$存在使$(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$的形狀为(14)，这里每个$(\beta_i)$是一行的或是形狀如(16)的二行陣.

最后叙述正交变换的特殊情形. 这里一行陣块$(\beta_i)$伴着向量$y_i \neq 0$使$y_iA = \beta_i y_i$. 因为$A$不改变向量的长度，故$\beta_i = \pm 1$. 又$A$在二維子空間$\mathfrak{S}_i$里是正交綫性变换，所以陣块(16)是正交陣. 故

$$\begin{bmatrix} \rho_i & \varepsilon_i \\ -\varepsilon_i & \rho_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_i & -\varepsilon_i \\ \varepsilon_i & \rho_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这就化为单一条件

$$\rho_i^2 + \varepsilon_i^2 = 1. \tag{17}$$

我們可决定一个$\theta_i$使$\cos\theta_i = \rho_i$，$\sin\theta_i = \varepsilon_i$；于是，(16)化为

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}. \tag{18}$$

**定理 9.** 每个实正交陣在正交陣羣里与一个陣(14)共軛，此時$(\beta_i)$是一行陣$(\pm 1)$或是形狀(18)的陣.

### 習 題 50

1. 証明：一个正交綫性变换是眞的或假的按特征多項式的根$-1$的重根数是偶数或奇数而定.

2. 証明：如果$A$在奇数維欧几里得空間里是一个旋轉，則有使$uA = u$的非零向量$u$存在.

3. 証明：正交綫性变换的每个集合是正交完全可約的.

4. 証明：如果$O$是正交綫性变换，它沒有$-1$的特征根，則$S = (O-1)(O+1)^{-1}$是斜称变换，而$O = (1+S)(1-S)^{-1}$. 証明：如果$O$是正交綫性变换，而1不是它的特征根，則$S = (O+1)(O-1)^{-1}$是斜称变换，而$O = (S+1)(S-1)^{-1}$.

**8. 半定变换** 如果一个綫性变换$A$是对称的，并且相伴的对称双綫性形式$(xA, y)$是正定的，則$A$說是**正定变换**. $(xA, y)$是正定的意思是說：对于所有$x \neq 0$，$(xA, x) > 0$. 这个概念可稍加推广为：如果对于所有$x$，$(xA, x) \geqslant 0$，則說$A$是(非負的)**半定变换**. 由这个定义可見：正定变换是半定变换并且是1—1的. **逆定理**也成立，这可由下面关于正定性与半定性的判断准則得出.

**定理 10.** 对称變換$A$是正定的(半定的)必须而且只須它的

特征根都是正(非負)數.

証 我們知道，$\mathfrak{R}$ 有一个笛卡儿基 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 存在使每个 $y_i$ 是一个特征向量，亦即 $y_iA = \rho_iy_i$，这里 $\rho_i$ 是特征根. 但 $(y_iA, y_i) = (\rho_iy_i, y_i) = \rho_i(y_i, y_i)$ 与 $\rho_i$ 同号. 所以，如果 $A$ 是正定(半定)的，則每个 $\rho_i$ 是正(非負)的. 反过来，設对于所有 $i$，$\rho_i > 0\ (\geqslant 0)$，并写 $x = \sum \xi_iy_i$，則

$$
\begin{aligned}
(xA, x) &= \left(\sum_1^n \xi_iy_iA, \sum_1^n \xi_jy_j\right) \\
&= \left(\sum_1^n \xi_i\rho_iy_i, \sum_1^n \xi_jy_j\right) \\
&= \sum_1^n \rho_i\xi_i^2.
\end{aligned}
$$

如果所有 $\rho_i$ 都是 $> 0$，則除非每个 $\xi_i = 0$，它必定 $> 0$. 所以，$\rho_i > 0$ 保証了正定性. 如果 $\rho_i \geqslant 0$，則显然也有 $(xA, x) \geqslant 0$.

如果 $A$ 是 1—1 变换，則 0 不是 $A$ 的特征根. 所以，如果 $A$ 是半定的并且是 1—1 的，則 $A$ 的所有特征根都是正数；故由定理 10 知：$A$ 是正定的.

如果 $A$ 是欧几里得空間里一个任意綫性变换，則因为 $(xB, x) = (xAA', x) = (xA, xA) \geqslant 0$，故 $B = AA'$ 是半定变换. 我們还知：$B$ 与 $A$ 有相同的朒空間；这因为，如果 $zA = 0$，显然有 $zB = 0$. 反过来，如果 $zB = 0$，則 $0 = (zB, z) = (zA, zA)$，故可推得 $zA = 0$. 这个說明的一个推論为：$B$ 是正定的必須而且只須 $A$ 是 1—1 变换.

今証下面有用的結果：

**定理 11.** 任意半定變換 $B$ 有一个半定平方根 $P$ (亦卽 $P^2=B$)，并且 $P$ 是唯一的.

証 决定半定变换 $P$ 使 $P^2 = B$ 是不难的. 我們选一个笛卡儿基 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 使 $y_iB = \rho_iy_i$，并且知都是 $\rho_i \geqslant 0$. 于是，可定义 $P$ 为使 $y_iP = \rho_i^{1/2}y_i$ 的綫性变换. 显然，$P^2 = B$. 又因为 $P$ 关于一个笛卡儿基的陣是对称的；所以，$P$ 是对称变换. 最后，因

为 $P$ 的特征根 $\rho_i^{1/2}$ 是非負的，故 $P$ 是半定变换. 要証 $P$ 的唯一性，可把 $B$ 的特征向量編組，使为首 $n_1$ 个特征向量都是属于 $\rho_1$，其次 $n_2$ 个特征向量都是属于 $\rho_2(\neq\rho_1)$，仿此类推. 我們还引入空間

$$\mathfrak{R}_1 = [y_1, y_2, \cdots, y_{n_1}],$$
$$\mathfrak{R}_2 = [y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \cdots, y_{n_1+n_2}], \quad \cdots,$$

则 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_h$（这里 $h$ = 不同的特征根的个数）. 如果 $u_i$ 是 $\mathfrak{R}_i$ 里任意向量，显然 $u_iB=\rho_iu_i$. 另一方面，令 $u=u_1+u_2+\cdots+u_h$，这里 $u_i\in\mathfrak{R}_i$ 是属于根 $\rho_i$ 的任意特征向量，亦即 $uB=\rho_iu$，则

$$\begin{aligned}\rho_iu = uB &= (u_1+u_2+\cdots+u_h)B\\ &= u_1B+u_2B+\cdots+u_hB\\ &= \rho_1u_1+\rho_2u_2+\cdots+\rho_hu_h.\end{aligned}$$

于是，如果 $j\neq i$，则 $u_j=0$ 而 $u=u_i\in\mathfrak{R}_i$. 故知空間 $\mathfrak{R}_i$ 恰是 $\mathfrak{R}$ 的特征子空間与 $B$ 的特征根 $\rho_i$ 对应的. 我們已知，綫性变换 $B$ 的特征子空間对于与 $B$ 可交换的任意綫性变换 $C$ 是不变的. 如果 $P$ 是任意綫性变换能使 $P^2=B$，则 $BP=PB$，而 $\mathfrak{R}_iP\subseteq\mathfrak{R}_i$. 所以，如果 $P$ 是半定变换，则 $P$ 在每个 $\mathfrak{R}_i$ 里可导出一个半定变换. 但我們可找得 $\mathfrak{R}_i$ 的一个笛卡儿基 $(w_1^{(i)}, w_2^{(i)}, \cdots, w_{n_i}^{(i)})$ 使 $Pw_j^{(i)}=\gamma_jw_j^{(i)}$. 所以 $Bw_j^{(i)}=P^2w_j^{(i)}=\gamma_j^2w_j^{(i)}$. 于是，$\gamma_j^2=\rho_i$，而 $\gamma_j=\rho_i^{1/2}$. 这証明：$P$ 在空間 $\mathfrak{R}_i$ 里与 $\rho_i^{1/2}$ 的純量乘法重合. 所以，$P$ 是我們前此作出的映照.

### 習 題 51

1. 証明：如果 $A$ 是任意对称变换，它的負特征根的重根数是偶数，则 $A$ 有一个平方根.
2. 証明：任意对称变换 $A$ 有一个唯一的对称立方根.

**9. 任意綫性变换的极因子分解** 任意实数显然可写为一个非負实数与 1 或 $-1$ 之积；这个結果可推广到欧几里得空間里的綫性变换，如次：

**定理 12.** 歐几里得空間里每个綫性變換 $A$ 可寫为積 $A=PO$，这里 $P$ 是半定變換，而 $O$ 是正交變換. $P$ 是唯一决定的，而 $O$ 是唯

一的必須而且只須 $A$ 是 1—1 變換.

証　在 $A$ 是 1—1 的这个重要情形下，証明是較为簡単的；所以我們先考虑这个情形. 我們作正定变换 $B = AA'$ 及它的正定平方根 $P$. 令 $O = P^{-1}A$, 则

$$OO' = P^{-1}AA'P^{-1} = P^{-1}BP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = 1,$$

这証明 $O$ 是正交变换. 因为 $A = PO$, 表示式的存在可由 $A$ 是 1—1 的来証实.

在一般情形的証明的基础与前此相同. 我們仍定义 $B = AA'$, 并取 $P$ 为 $B$ 的半定平方根. 我們的工作是决定一个正交变换 $O$ 使 $A = PO$. 我們先用 $xP \to xA$ 定义空間 $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}P$ 到空間 $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R}A$ 內的一个映照, 如果 $xP = yP$, 则 $(x-y)P = 0$, 故 $(x-y)B = 0$. 因为 $B = AA'$. 故推得 $(x-y)A = 0$, 从而 $xA = yA$. 这指出上面的对应是单值的. 显然它是綫性的. 这个映照还保持向量的长度不变; 这因为

$$(xA, xA) = (xAA', x) = (xB, x),$$

而

$$(xP, xP) = (xP^2, x) = (xB, x).$$

今 $A$, $B$ 及 $P$ 有相同的朒空間; 所以, 它們有相同的秩. 故正交余空間 $\mathfrak{S}^\perp$ 与 $\mathfrak{S}_1^\perp$ 有相同維数 $= h$. 今令 $(u_1, u_2, \cdots, u_h)$; $(v_1, v_2, \cdots, v_h)$ 是这两个空間的笛卡儿基, 则 $\mathfrak{S}^\perp$ 到 $\mathfrak{S}_1^\perp$ 內的綫性变换, 它把 $u_i$ 映到 $v_i$, 保持向量的长度不变. 故映照

$$O: \ xP + \sum \alpha_i u_i \to xA + \sum \alpha_i v_i$$

是一个正交变换. 显然, $xPO = xA$ 对于所有 $x$ 成立, 故 $A = PO$.

如果 $A = PO$, 则 $AA' = P^2$. 所以, $P$ 必須是半定变换 $B = AA'$ 的一个平方根. 于是, $P$ 是唯一的. 如果 $A$ 是 1—1 的, 则 $O = P^{-1}A$ 也是唯一的. 反过来, 如果 $A$ 不是 1—1 的, 则在上面記法里 $h > 0$. 此时, 从 $\mathfrak{S}^\perp$ 到 $\mathfrak{S}_1^\perp$ 內的可用变换有多种选法, 这就决定不同的正交变换 $O$. 这完成了定理的証明.

仿此, 可作出因子分解 $A = O_1P_1$, 这里 $O_1$ 是正交变换, 而 $P_1$ 是半定变换. 这也可由应用定理 12 于 $A'$ 而导出.

## 習 題 52

1. 分解

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

为一个正定陣与一个正交陣的积.

2. 証明: $A = PO$ 是正規的必須而且只須 $PO = OP$.

**10. 单式几何学** 单式几何学是关于复数域上一个向量空間結連一个正定厄米特純量积 $(x, y)$ 的研究. 就出发点来說，这个几何学显然具有欧几里得几何学的各特征; 但另一方面由于它的基域是代数閉域，故可望有某些簡化，象典型陣的理論就比实数域情形为簡单. 我們无需詳細地重复上面的討論，只把主要的結果述出，并且也只在有新的方法能够把在欧几里得情形下的証明簡化时才給出証明.

今設 $\Phi$ 是复数域，而 $(x, y)$ 是关于通常映照 $\alpha \to \bar{\alpha}$ 的一个厄米特純量积，則对于任意 $x$, $(x, x)$ 是实数. 我們将假定 $(x, y)$ 是正定的; 亦即，$x \neq 0$ 时 $(x, x) > 0$. 由这个假定可推得: 有一个基 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 存在，它是单式基，亦即能使 $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$. 由一个单式基过渡到另一个单式基的陣 $(\sigma)$ 是一个单式陣; 亦即，能使

$$(\sigma)(\bar{\sigma})' = 1 = (\bar{\sigma})'(\sigma).$$

这些陣組成 $L(\Phi, n)$ 的单式子羣 $U(\Phi, n)$，这里 $\Phi$ 是复数域. 权密特的正交化方法仍能成立，且使我們能够把 §1 的所有結果轉移为当前情形的結果. 定理 1 的类似定理是: 如果 $(\beta)$ 是正定厄米特純量积的陣，則 $(\beta)$ 可写成 $(\nu)(\bar{\nu})'$ 形状，这里 $(\nu)$ 是适当的复数元素的三角陣. 定理 2 的类似定理可由以"复数"代替"实数"及以"单式"代替"正交"而得.

綫性变换 $A$ 的折轉变换与通常的定义一样. 如果 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 是一个单式基，則 $A'$ 的陣是 $A$ 的陣的共軛折轉陣 $(\bar{\alpha})'$. 故 $A$ 是厄米特变换，亦即 $A' = A$，必須而且只須 $(\alpha)$ 是厄米特陣; $A$ 是斜厄米特变换，亦即 $A' = -A$，必須而且只須 $(\alpha)$ 是斜厄米特陣;

$A$ 是单式变换，亦即 $A'A=1=AA'$，必须而且只须 $(\alpha)$ 是单式陣；$A$ 是正規变换，亦即 $A\bar{A}'=A'A$，必須而且只須 $(\alpha)(\bar{\alpha})'=(\bar{\alpha})'(\alpha)$。这里要指出：如果 $A$ 是斜厄米特变换，则 $iA(i^2=-1)$ 是厄米特变换。这因为，純量乘法 $x\to\mu x$ 的折轉变换是純量乘法 $x\to\bar{\mu}x$。所以 $x\to ix$ 是斜厄米特变换；又因为它与 $A$ 可交换，故 $iA$ 是厄米特变换。因此，斜厄米特变换的理論可化为厄米特变换的理論，而无須另外討論。

今設 $A$ 是厄米特变换，并令 $\rho$ 是特征多項式的一个根。令 $y$ 是一个对应的特征向量，則

$$\rho(y,y)=(\rho y,y)=(yA,y)=(y,yA)$$
$$=(y,\rho y)=(y,y)\bar{\rho}.$$

因为 $(y,y)\neq 0$，可推得 $\bar{\rho}=\rho$ 是实数。我們把 $y$ 正規化以得使 $(y_1,y_1)=1$ 的向量 $y_1$，則也有 $y_1A=\rho_1y_1$，而 $\rho=\rho_1$。如果 $\mathfrak{S}$ 是任意子空間，而对于所有 $y\in\mathfrak{S}$ 能使 $(y,y')=0$ 的向量构成的正交余空間記作 $\mathfrak{S}^{\perp}$，則这个空間是 $\mathfrak{S}$ 的一个余空間；并且，如果 $\mathfrak{S}$ 在 $A$ 下不变，則 $\mathfrak{S}^{\perp}$ 在 $A$ 下也不变。如果把这个注解应用到 $\mathfrak{S}=[y_1]$，則知 $\mathfrak{R}=[y_1]\oplus[y_1]^{\perp}$，而 $[y_1]^{\perp}A\subseteq[y_1]^{\perp}$。于是，可找出一个实数 $\rho_2$ 及 $[y_1]^{\perp}$ 里一个向量 $y_2$ 使 $y_2A=\rho_2y_2$。次写 $\mathfrak{R}=[y_1,y_2]\oplus[y_1,y_2]^{\perp}$，而对 $[y_1,y_2]^{\perp}$ 重复这样論証。最后就得一个单式基，使 $A$ 关于这个基的陣是

$$\operatorname{diag}\{\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n\},$$

这里 $\rho_i$ 都是实数。

**定理 13.** 如果 $(\alpha)$ 是一个复厄米特陣，則有一个單式陣 $(\sigma)$ 存在，使 $(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$ 是一个实对角陣。

对于斜厄米特陣的类似結果显然也成立。其次也象欧几里得情形一样，我們可証：如果 $\omega$ 是可交换的厄米特陣及斜厄米特陣的一个集合，則有单一的单式陣 $(\sigma)$ 存在，使对于每个 $(\alpha)\in\omega$，$(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$ 是对角陣。这也与前此一样，导致关于正規陣方面（而結果也是关于单式陣方面）与定理 13 相应的定理，只是删去"实"字。单式陣的特征根的絕对值是 1；这因为，如果 $yA=\rho y$，則

$$|\rho|^2(y, y) = (yA, yA) = (y, y).$$

关于单式陣的主要定理，可使用在厄米特陣上用过的論証来直接导出．論証的关鍵在于：如果$\mathfrak{S}$是单式变换下一个不变子空間，則正交余空間$\mathfrak{S}^{\perp}$也是不变的．

如果$A$是一个厄米特綫性变换，則相伴的双綫性形式$(xA, y)$是厄米特形式；这因为

$$(yA, x) = (y, xA) = \overline{(xA, y)}.$$

故$(xA, x)$对于任意的$x$是实数．如同在欧几里得情形，如果对于所有$x \neq 0$，$(xA, x) > 0(\geqslant 0)$，則$A$叫做正定(半定)的厄米特綫性变换．在欧几里得情形所作的討論可以不用改变而移到当前情形．譬如，我們可証：任意半定变换有一个唯一的平方根．也与前面一样，这可用以建立极因子分解．单式空間里每个綫性变换$A$可写成$A = PU$，这里$P$是半定变换而$U$是单式变换，$P$是唯一决定的，而$U$是唯一的必須而且只須$A$是1—1变换．

今将証可用于单式空間里任意綫性变换及陣的另一个定理，这就是下面的定理．

**定理 14.** 如果$(\alpha)$是复元素的陣，則有一个单式陣$(\sigma)$存在使$(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$是三角陣．

証　要証这个定理，令$A$是綫性变换，它关于某单式基$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$的陣是給定的陣$(\alpha)$．如果$\rho_1$是一个特征根，則有一个向量$y_1$存在使$(y_1, y_1) = 1$，并且$y_1A = \rho_1 y_1$．我們可找到含有向量$y_1$的一个单式基$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$．因为$y_1A = \rho_1 y_1$，所以$A$关于这个基的陣是

$$(19) \qquad (\beta) = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{bmatrix}.$$

如果$(\mu)$是$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$关于$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$的陣，則$(\mu)$是单式陣，而$(\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}$是(19)的陣$(\beta)$．今可設有$(n-1)$行及列的单式陣$(\nu)$存在使

$$(\nu)\begin{bmatrix}\rho_{22} & \cdots & \rho_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn}\end{bmatrix}\quad (\nu)^{-1}=\begin{bmatrix}\rho_2 & & 0\\ & \ddots & \\ * & & \rho_n\end{bmatrix},$$

则陣 $(\tau)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (\nu)\end{bmatrix}$ 是单式陣,而

$$(\tau)(\beta)(\tau)^{-1}=(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}=\begin{bmatrix}\rho_1 & & & 0\\ & \rho_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \rho_n\end{bmatrix},$$

这里 $(\sigma)=(\tau)(\mu)$ 是单式陣.

**習 題 53**

1. 証明：定理 14 对于可交换的复陣的任意集合 $\omega$ 成立.

2. 在实数情形,定理 14 的类似定理是什么?

3. 証明：三角陣是正規的必須而且只須它是对角陣. 使用这个結果証明：关于复数元素的正規陣的典型形式的定理.

**11. 綫性变换的分析函数** 我們将取陣序列的收斂性概念作为陣問題上分析論述的出发点. 如果 $\{(\alpha^{(k)})\}(k=1,2,3,\cdots)$ 是 $\Phi_n$ 里的陣的一个无限序列，这里 $\Phi$ 是复数域. 如果对于每个 $i,j=1,2,\cdots,n$，复数序列 $\alpha_{ij}^{(k)}\to\alpha_{ij}$，則説 $\{(\alpha^{(k)})\}$ 收斂于 $(\alpha)$,記作 $(\alpha^{(k)})\to(\alpha)$. 极限陣 $(\alpha)$ 是唯一的；这因为复数序列的极限是这样的. 使用这个收斂性定义,显然陣的加法与乘法是連續函数；亦即,如果 $(\alpha^{(k)})\to(\alpha)$ 而 $(\beta^{(k)})\to(\beta)$，則

$$(\alpha^{(k)})+(\beta^{(k)})\to(\alpha)+(\beta), \tag{20}$$

$$(\alpha^{(k)})(\beta^{(k)})\to(\alpha)(\beta). \tag{21}$$

要認識这些基本法則的真实性,只須知道两个陣的和(积)的 $(i,j)$ 元素是 $2n^2$ 个元素 $\alpha_{ij},\beta_{ij}$ 的連續函数. (21) 的一个重要特殊情形是：如果 $(\alpha^{(k)})\to(\alpha)$ 而 $(\mu)$ 是滿秩陣,則

$$(\mu)(\alpha^{(k)})(\mu)^{-1}\to(\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}. \tag{22}$$

上面这个結果可用以定义綫性变换的收斂性. 令 $\{A_k\}(k=1,2,\cdots,)$ 是 $\Phi$ 上 $\mathfrak{R}$ 里綫性变换的一个无限序列,并令 $(\alpha^{(k)})$ 是 $A_k$ 关于 $\mathfrak{R}$ 的一个基 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 的陣；如果 $(\alpha^{(k)})\to(\alpha)$,这

里$(\alpha)$是$A$的陣，則說$\{A_k\}$收斂于綫性变换$A$，記作$A_k \to A$. 由(22)知，条件$A_k \to A$与$\mathfrak{R}$的基的选取无关.

今将論述綫性变换的冪級数. 也与普通級数一样，如果

$$(23) \qquad \gamma_0 1 + \gamma_1 A + \gamma_2 A^2 + \cdots, \quad (\gamma_i \in \Phi)$$

的部分和

$$S_k = \gamma_0 1 + \gamma_1 A + \gamma_2 A^2 + \cdots + \gamma_k A^k$$

的序列$\{S_k\}$收斂，則$\{S_k\}$的极限叫做(23)的和，記作

$$\gamma_0 1 + \gamma_1 A + \gamma_2 A^2 + \cdots = S.$$

我們要証的主要結果是下面的定理.

**定理 15.** 令$\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2 + \cdots$是普通冪級數，它的收斂半徑是$r$，如果綫性變換$A$的特征根$\rho_i$适合$|\rho_i| < r$，則对于这樣的$A$，冪級數(23)是收斂的.

証　我們选取一个基，使$A$关于这个基的陣是古典典型形式

$$\begin{bmatrix} (\alpha_1) & & & \\ & (\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\alpha_h) \end{bmatrix},$$

这里每个对角陣块的形状为

$$(24) \qquad \begin{bmatrix} \rho & & & & \\ 1 & \rho & & & \\ & 1 & \rho & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \rho \end{bmatrix},$$

而$\rho$是一个特征根. 显然$A^m$的陣里陣块的形状与$A$的陣相同，而且与(24)相同位置的陣块是

$$\begin{bmatrix} \rho^m & & & \\ \binom{m}{1}\rho^{m-1} & \rho^m & & \\ \binom{m}{2}\rho^{m-2} & \binom{m}{1}\rho^{m-1} & \rho^m & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

后者这結果可由把(24)写成$\rho 1 + z$而导出，这里

$$z=\begin{bmatrix}0\\1&0\\&1&0\\&&\ddots&\ddots\\&&&1&0\end{bmatrix};$$

于是

$$z^2=\begin{bmatrix}0\\0&0\\1&0&0\\&\ddots&\ddots&\ddots\\&&1&0&0\end{bmatrix},\quad z^3=\begin{bmatrix}0\\0&0\\0&0&0\\1&0&\ddots\\0&1&&\ddots\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix},\quad\cdots.$$

所以，如果 $S_k(\lambda)$ 表示 $S(\lambda)=\gamma_0+\gamma_1\lambda+\gamma_2\lambda^2+\cdots$ 的第 $k$ 部分和，则 $S_k(A)$ 的阵的阵块的形状是

$$\begin{bmatrix}S_k(\rho)&0\\S_k'(\rho)&S_k(\rho)&0\\\dfrac{S_k''(\rho)}{2!}&S_k'(\rho)&S_k(\rho)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\end{bmatrix}.$$

如果 $|\rho|<r$，则 $S_k(\rho),S_k'(\rho),\cdots$ 顺序收敛于 $S(\rho),S'(\rho),\cdots$. 所以，由 $\{S_k(A)\}$ 决定的阵序列收敛于一个阵，它的对角阵块的形状是

$$\begin{bmatrix}S(\rho)&0\\S'(\rho)&S(\rho)&0\\\dfrac{S''(\rho)}{2!}&S'(\rho)&S(\rho)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\end{bmatrix},\tag{25}$$

故 $\{S_k(A)\}$ 收敛.

一个重要的特殊情形是对于所有 $A$ 定义的指数函数

$$\exp A=1+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots.$$

$\exp A$ 的阵具有对角阵块形状，各块的形状为

$$
\begin{bmatrix}
\exp\rho & & & \\
\exp\rho & \exp\rho & & \\
\frac{\exp\rho}{2!} & \exp\rho & \exp & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots
\end{bmatrix}.
$$

这个公式可用以計算 $\det(\exp A)$，而得出

$$\det(\exp A) = \exp\rho_1 \exp\rho_2 \cdots \exp\rho_n = \exp(\sum \rho_i),$$

这里 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ 是 $A$ 的 $n$ 个特征根．所以

$$\det(\exp A) = \exp(\mathrm{tr}\, A), \tag{26}$$

这里 $\mathrm{tr}\, A$ 表示 $A$ 的迹．

如果 $A$ 是正規綫性变换，則 $A$ 的冪級数特别容易处理；这因为，此时可在向量空間里找一个单式基使 $A$ 的陣是典型形式

$$\mathrm{diag}\{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n\}. \tag{27}$$

于是，如果 $S(\lambda) = \gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2 + \cdots$ 是一个冪級数，它的收斂半径为 $r > |\rho_i| (i = 1, 2, \cdots, n)$，則 $S(A)$ 是确定的，而且这个綫性变换关于选定的单式基的陣是

$$\mathrm{diag}\{S(\rho_1), S(\rho_2), \cdots, S(\rho_n)\}.$$

因为 $S(A)$ 关于一个单式基有对角陣，所以这个变换是正規的．

如果 $U$ 是单式变换，則 (27) 里 $\rho_i$ 的絕对值为 1．所以，$\rho_i = \exp\sqrt{-1}\,\theta_i$，这里 $\theta_i$ 是实数．令 $H$ 是綫性变换，关于选定的单式基的陣是

$$\mathrm{diag}\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\},$$

則 $H$ 是厄米特变换，而上面的論究指出

$$U = \exp(iH). \tag{28}$$

这个結果与极因子分解結連起来，指出每个綫性变换的形状为

$$A = P\exp(iH), \tag{29}$$

这里 $P$ 是一个(正)半定厄米特变换，而 $H$ 是厄米特变换．这个因子分解显然推广了任意复数的因子分解 $\alpha = |\alpha| \exp(i\eta)$，这里 $\eta$ 是实数．

## 習 題 54

1. 証明：一个綫性变换 $A$ 是正定的厄米特变换必須而且只須有某个厄米特变换 $H$ 存在使 $A = \exp H$.

2. 証明：如果 $A$ 的特征根的絕对値 $< 1$，則 $\log(1 + A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \cdots$ 是确定的. 証明：$\exp(\log(1 + A)) = 1 + A$.

3. 証明：$A^k \to 0$ 必須而且只須 $A$ 的所有特征根的絕对値都小于 1.

4. 証明：$A$ 的冪序列 $\{A^k\}$ 拥有收斂子序列必須而且只須 1）对于每个特征根 $\rho$ 有 $|\rho| \leqslant 1$ 及 2）对应于絕对値为 1 的根的初等因子都是单因子.

# 第七章

# 向量空間的积

本章講述由一个右向量空間 $\mathfrak{R}'$ 与一个左向量空間 $\mathfrak{S}$ 构成的空間对里作出一个羣 $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ 的方法，这个羣叫做两个空間的直接积. 积 $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ 是一个交換羣，但通常沒有自然的方法把这个羣作为一个向量空間. 如果因子中有一个是双側向量空間，則我們的方法可导致一个向量空間. 本章定义这个概念，并且注意到：如果 $\Delta = \Phi$ 是一个域，則任意左或右空間可依常規看作一个双側空間. 这就导向域上两个向量空間的克伦内克积的定义. 我們还討論张量代数的綱要，并且講述域 $\Phi$ 上向量空間扩张为包含 $\Phi$ 的域 $P$ 上向量空間. 最后，講述域上(非結合)代数的概念并定义代数的直接积.

**1. 向量空間的积羣** 結連一个左空間与一个右空間的双綫性形式 $g(x, y')$ 可看作由每个空間里各选一个向量所得的向量对的积的一个类型，它給出 $\Delta$ 里一个值 $g(x, y')$. 这个积的基本性质是分配律与下面的齐次性：

(1) $\quad g(\alpha x, y') = \alpha g(x, y'), \quad g(x, y'\alpha) = g(x, y')\alpha.$

本章的基本概念是現在要定义的另一种积的概念.

令 $\mathfrak{R}'$ 是可除环 $\Delta$ 上一个右向量空間，而 $\mathfrak{S}$ 是可除环 $\Delta$ 上一个左向量空間. 令 $\mathfrak{P}$ 是一个交換羣(用 + 表它的运算)，并設对于每个向量对 $x', y$，这里 $x' \in \mathfrak{R}'$，$y \in \mathfrak{S}$，相伴有一个唯一的元素 $x' \times y \in \mathfrak{P}$；如果

1. $(x_1' + x_2') \times y = x_1' \times y + x_2' \times y,$

   $x' \times (y_1 + y_2) = x' \times y_1 + x' \times y_2;$

2. $x'\alpha \times y = x' \times \alpha y;$

3. $\mathfrak{P}$ 的每个元素的形状为 $\sum x_i' \times y_i$.

则 $\mathfrak{P}$ 叫做 $\mathfrak{R}'$ 与 $\mathfrak{S}$ 关于积 $\times$ 的**积羣**.

先証一个非零双綫性形式是这个类型的积必須而且只須 $\Delta = \Phi$ 是可交换的. 这因为,如果采用現在的記法,并且以 $x' \times y$ 代替 $g(y, x')$, 则由 (1) 得

$$x' \times \alpha y = \alpha(x' \times y), \quad x'\alpha \times y = (x' \times y)\alpha.$$

另一方面有 $x' \times \alpha y = x'\alpha \times y$. 所以,

$$\alpha(x' \times y) = (x' \times y)\alpha.$$

所以,如果它是非零形式,则可取 $\Delta$ 里所有值. 故上面的方程指出 $\Delta$ 是可交换的. 逆定理显然成立.

次就任意向量空間对 $\mathfrak{R}'$ 及 $\mathfrak{S}$ 給出作积羣的方法. 先取与 $\mathfrak{R}'$ 对偶的 $\mathfrak{R}$ 为左向量空間,并設由非退化的双綫性形式 $g(x, y')$ 給出这个对偶性,这里 $x \in \mathfrak{R}$, $y' \in \mathfrak{R}'$. 我們取 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{S}$ 内的綫性变换羣 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 为值羣 $\mathfrak{P}$. 最后,定义 $x' \in \mathfrak{R}'$ 与 $y \in \mathfrak{S}$ 的积 $x' \times y$ 为綫性变换

$$x \to g(x, x')y. \tag{2}$$

则立知它具有 1. 及 2. 我們还知道:[1] $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{S}$ 内的任意綫性映照的形状为

$$x \to \sum g(x, x_i')y_i; \tag{3}$$

故由我們的定义知,它等于和 $\sum x_i' \times y_i$. 这証明了它具有性質 3.

对于任意积,我們可証得通常的法則:

$$0 \times y = 0 = x' \times 0,$$

$$(-x') \times y = -(x' \times y) = x' \times (-y).$$

次設 $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个基,则任意的 $y = \sum \beta_i f_i$; 于是, $x' \times y = \sum x' \times \beta_i f_i = \sum x'\beta_i \times f_i$. 故 $\mathfrak{P}$ 的任意元素可写为 $\sum x_i' \times f_i$ 的形状. 仿此,如果 $(e_1', e_2', \cdots, e_n')$ 是 $\mathfrak{R}'$ 的一个基,则 $\mathfrak{P}$ 的任意元素可写为 $\sum e_i' \times y_i$, 这里 $y_i \in \mathfrak{S}$. 如果 $\mathfrak{P}$ 的每个元素用上述两种方法写出都是唯一的,则 $\mathfrak{P}$ 叫做 $\mathfrak{R}'$ 与 $\mathfrak{S}$ 的一个**直接**

---

1) 見第五章, §5.

积. 更好的安排方法如次:如果

4. (a) $\sum x_i' \times y_i = 0$ 可推得 $y_i$ 是綫性相关的,或所有 $x_i' = 0$;

(b) $\sum x_i' \times y_i = 0$ 可推得 $x_i'$ 是綫性相关的,或所有 $y_i = 0$.

則称羣 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{R}'$ 与 $\mathfrak{S}$ 关于 $\times$ 的一个直接积.

按这个定义,羣 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 是一个直接积. 这因为,如果 $\sum x_i' \times y_i = 0$; 則由积的定义知:对于所有 $x$, $\sum g(x, x_i')y_i = 0$. 如果 $y_i$ 是綫性无关的則对于所有 $x$, $g(x, x_i') = 0$. 于是由形式的非退化性知:对于所有 $i$, $x_i' = 0$. 另一方面, 設 $x_i'$ 是綫性无关的,則知可找到 $x_j$ 的一个集合使 $g(x_j, x_i') = \delta_{ji}$. 于是,每个

$$y_j = \sum g(x_j, x_i')y_i = 0.$$

$\mathfrak{R}'$ 与 $\mathfrak{S}$ 的直接积是这两个空間的积的"最一般"方式; 这可由下面定理看出.

**定理 1.** 令 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{R}'$ 与 $\mathfrak{S}$ 關于 $\times$ 的一个直接積, 并令 $\mathfrak{P}_1$ 是这两个空間關于乘法 $\times_1$ 的任意積,則映照 $\sum x_i' \times y_i \to \sum x_i' \times_1 y_i$ 是 $\mathfrak{P}$ 到 $\mathfrak{P}_1$ 上的一个同態.

証 設元素 $z \in \mathfrak{P}$ 有两种方法写为积的和. 我們可設它們是 $z = \sum_1^m x_i' \times y_i = \sum_{m+1}^q (-x_j') \times y_j$; 于是 $\sum_1^q x_k' \times y_k = 0$. 今把 $y_i$ 用綫性无关元素的集合 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ (例如用基)表出,則 $y_k = \sum \alpha_{kl} f_l$, 而

$$0 = \sum x_k' \times y_k = \sum_k x_k' \times \sum_l \alpha_{kl} f_l$$

$$= \sum_l \left(\sum_k x_k' \alpha_{kl}\right) \times f_l.$$

所以 $\sum x_k' \alpha_{kl} = 0$ $(l = 1, 2, \cdots, r)$. 由此推知, $\mathfrak{P}_1$ 里有关系 $\sum_l \left(\sum_k x_k' \alpha_{kl}\right) \times_1 f_l = 0$. 在 $\mathfrak{P}_1$ 里把上面的步驟倒轉, 可推得 $\sum x_k' \times_1 y_k = 0$. 所以, $z$ 的两个形状不同的象 $\sum_1^m x_i' \times_1 y_i$ 与 $\sum_{m+1}^q (-x_j') \times_1 y_j$ 相等. 这意味着对应

$$\sum x_i' \times y_i \to \sum x_i' \times_1 y_i$$

是单值的．至此，可直接驗証这个映照是 $\mathfrak{P}$ 到 $\mathfrak{P}_1$ 上的一个同态．

今設 $\mathfrak{P}_1$ 也是一个直接积，则前面的論証指出：由 $\sum x_i' \times_1 y_i = 0$ 可推得 $\sum x_i' \times y_i = 0$．故同态核是 0，从而同态化为同构．这証明了

**定理 2.** 如果 $\mathfrak{P}$ 及 $\mathfrak{P}_1$ 都是 $\mathfrak{R}'$ 与 $\mathfrak{S}$ 的直接積，则"自然"映照 $\sum x_i' \times y_i \to \sum x_i' \times_1 y_i$ 是一个同構．

这个結果指出，給定的两个向量空間的直接积实質上只有一个．故可只叫它做直接积，而記这个羣为 $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$．

### 習 題 55

1．把 $\mathfrak{R}'$ 里任意向量写为 $n_1 \times 1$ 陣，而 $\mathfrak{S}$ 里任意向量写为 $1 \times n_2$ 陣．令 $\mathfrak{R}'$ 与 $\mathfrak{S}$ 里純量乘法分别是坐标的右乘法及左乘法．証明：$n_1 \times n_2$ 陣的羣是 $\mathfrak{R}'$ 与 $\mathfrak{S}$ 关于 $x' \times y = x'y$（通常陣积）的直接积．

2．証明：从 4．的两个条件中的一个可推得余一个．

[提示：注意到只用一个来証定理 1.]

**2. 綫性变换的直接积** 今考虑定理 1 的一个重要推广．我們也与定理 1 一样令 $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$，但对于另一个羣現在改取 $\Delta$ 上右空間 $\mathfrak{U}'$ 与 $\Delta$ 上左空間 $\mathfrak{V}$ 的任意积 $\mathfrak{Q}_1$．設 $A'$ 是 $\mathfrak{R}'$ 到 $\mathfrak{U}'$ 內的一个綫性映照，而 $B$ 是 $\mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{V}$ 內的一个綫性映照，則可断言映照

$$\sum x_i' \times y_i \to \sum x_i' A' \times_1 y_i B \tag{4}$$

是 $\mathfrak{P}$ 到 $\mathfrak{Q}_1$ 內的一个同态．証明可由重复使用証明定理 1 的論点而得．譬如，指出由关系 $\sum x_k' \times y_k = 0$ 可推得 $\sum x_k' A' \times_1 y_k B = 0$．这也与前面相似，写 $y_k = \sum \alpha_{kl} f_l$，这里 $f_l$ 都是綫性无关的；然后得出 $\sum x_k' \alpha_{kl} = 0$．于是由 $A'$ 的綫性也得 $\sum (x_k' A') \alpha_{kl} = 0$．故由 $B$ 的綫性得

$$0 = \sum_k (x_k' A') \alpha_{kl} \times_1 f_l B = \sum_k x_k' A' \times_1 \sum_l \alpha_{kl} (f_l B)$$
$$= \sum_k x_k' A' \times_1 \sum_k y_k B.$$

証明的其余部分完全是前面証明的重复．

从現在的結果取 $\mathfrak{U}' = \mathfrak{R}'$，$\mathfrak{V} = \mathfrak{S}$，$A' = 1$，$B = 1$，即得定理 1．另一个重要的特殊情形是取 $\mathfrak{U}' = \mathfrak{R}'$，$\mathfrak{V} = \mathfrak{S}$，及 $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{P}$．

此时我們知道，如果 $A'$ 是 $\mathfrak{R}'$ 里任意綫性变换，而 $B$ 是 $\mathfrak{S}$ 里任意綫性变换，則由（4）定义的映照是直接积 $\mathfrak{P}$ 里一个自同态；我們叫它做 $A'$ 与 $B$ 的**直接积**，而記作 $A' \times B$. 由定义立知，直接积 $A' \times B$ 是可分配的：

$$(A_1' + A_2') \times B = A_1' \times B + A_2' \times B, \quad A' \times (B_1 + B_2) = A' \times B_1 + A' \times B_2, \tag{5}$$

并且

$$(A' \times B)(C' \times D) = A'C' \times BD. \tag{6}$$

如果用 $1'$ 表示 $\mathfrak{R}'$ 里恆等映照，而 $1$ 表示 $\mathfrak{S}$ 里恆等映照，則显然 $1' \times 1$ 是 $\mathfrak{P}$ 里恆等映照． 由（6）还知道，任意 $A' \times B$ 可分解为

$$A' \times B = (A' \times 1)(1' \times B) = (1' \times B)(A' \times 1). \tag{7}$$

### 習 題 56

1. 令 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 是 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{S}$ 內的綫性映照的羣，并且把 $\mathfrak{L}$ 看作 $\mathfrak{R}'$ 与 $\mathfrak{S}$ 按 §1 里定义的方式的积． 証明：如果 $A'$ 是 $\mathfrak{R}'$ 里一个綫性变换，而 $B$ 是 $\mathfrak{S}$ 里一个綫性变换，則 $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ 里映照 $A' \times B$ 与 $L \longrightarrow ALB$ 恆等，这里 $L$ 是 $\mathfrak{L}$ 的一个一般元素，而 $A$ 是 $A'$ 在 $\mathfrak{R}$ 里的折轉变换．

2. 令 $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$，并令 $\mathfrak{M}$ 是自同态 $\Sigma A_i' \times B_i$ 的全体，这里 $A_i'$ 是 $\mathfrak{R}'$ 里一个綫性变换，而 $B_i$ 是 $\mathfrak{S}$ 里一个綫性变换． 証明：$\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ 的自同态环的子环．

3. 証明：$1' \times B$ 形的元素的子集合是 $\mathfrak{M}$ 里与 $\mathfrak{L}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ 同构的子环，而 $A' \times 1$ 形的元素的子集合是 $\mathfrak{M}$ 里与 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}')$ 同构的子环．

**3. 双側向量空間** 上面給出"接合"两个向量空間以构成它們的直接积的方法有严重的缺点，就是最后結果只是一个羣，而不是一个向量空間． 要避去这个困难，此后将就双側向量空間来考虑，以代替前此的单側向量空間． **双側向量空間**是由变換羣 $\mathfrak{R}$、可除环 $\Delta$ 及两个函数 $\alpha x$ 与 $x\alpha$ 所构成的代数系，这两个函数 $\alpha x$ 与 $x\alpha$ 分別适合左与右純量乘法的条件并且对于所有 $\alpha, \beta \in \Delta$ 与所有 $x \in \mathfrak{R}$，适合結合律

$$(\alpha x)\beta = \alpha(x\beta). \tag{8}$$

所以我們的假定是：$\mathfrak{R}$ 同时为一个左及右向量空間，并且任意右（左）純量乘法是 $\mathfrak{R}$（作为一个左（右）向量空間）的一个綫性变換．

如果 $\Delta = \Phi$ 是一个域，任意右向量空間可看作一个左向量空

間. 只要命 $x\alpha = \alpha x$. 所以,在处理域上向量空間时,我們可設所有这些向量空間是左向量空間. 另一方面,我們也可把这些向量空間看作双側空間的特殊类型,此时由任意 $\alpha \in \Delta$ 决定的左乘法与右乘法是作为恆等的. 双側向量空間的这个"平凡的"类型是本章此后論述的主題. 我們不难作出其它不平凡类型的双側向量空間. 玆举一个例于次:

**例** 令 $\mathfrak{R}$ 是域 $\Phi$ 上一个 $n$ 維左向量空間,并令 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个(左)基. 令 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是 $\Phi$ 里的自同构,并定义 $\alpha \in \Phi$ 的右乘法是左空間 $\mathfrak{R}$ 里的綫性变换,由陣

$$\operatorname{diag}\{\alpha^{S_1}, \alpha^{S_2}, \cdots, \alpha^{S_n}\}$$

确定的. 則 $e_i\alpha = \alpha^{S_i} e_i$, 而 $(\Sigma\xi_i e_i)\alpha = \Sigma\xi_i\alpha^{S_i} e_i$. 因为

$$e_i(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)^{S_i} e_i = \alpha^{S_i} e_i + \beta^{S_i} e_i = e_i\alpha + e_i\beta,$$

$$e_i(\alpha\beta) = (\alpha\beta)^{S_i} e_i = \alpha^{S_i}\beta^{S_i} e_i = \alpha^{S_i}(e_i\beta)$$

$$= (\alpha^{S_i} e_i)\beta = (e_i\alpha)\beta,$$

$$e_i 1 = e_i,$$

所以 $\mathfrak{R}$ 是 $\Phi$ 上一个右向量空間. 因为右乘法是作为左空間的 $\mathfrak{R}$ 里的綫性变换,故(8)成立. 所以,$\mathfrak{R}$ 是一个双側向量空間.

今設 $\mathfrak{R}$ 是可除环 $\Delta$ 上的任意双側向量空間,而 $\mathfrak{S}$ 是 $\Delta$ 上一个左向量空間. 則可由把 $\mathfrak{R}$ 看作一个右向量空間而作直接积 $\mathfrak{P} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$. 因为映照 $x \to \alpha x$ 是作为右向量空間的 $\mathfrak{R}$ 里的一个綫性变换,故知映照 $\sum x_i \times y_i \to \sum \alpha x_i \times y_i$ 是 $\mathfrak{P}$ 里一个自同态,这里 $x_i \in \mathfrak{R}$, $y_i \in \mathfrak{S}$. 今命

$$\alpha \sum x_i \times y_i = \sum \alpha x_i \times y_i, \tag{9}$$

我們可驗証,关于这个純量乘法 $\mathfrak{P}$ 是 $\Delta$ 上一个左向量空間.

今将証:(左)維数 $\dim_l \mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的左維数与 $\mathfrak{S}$ 的左維数的积. 这因为,令 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个左基,并令 $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个左基,則任意 $x \in \mathfrak{R}$ 可写作 $\sum \xi_i e_i$, 而任意 $y \in \mathfrak{S}$ 可写作 $\sum \eta_j f_j$. 于是,

$$x \times y = \sum \xi_i e_i \times \eta_j f_j = \sum (\xi_i e_i)\eta_j \times f_j$$

$$= \sum_i \sum_j (\xi_i e_i)\eta_j \times f_j.$$

另一方面，向量$\sum_i (\xi_i e_i)\eta_j \in \mathfrak{R}$. 所以，$\sum_i (\xi_i e_i)\eta_j = \sum_k \mu_{jk} e_k$. 于是，

$$x \times y = \sum_j \left(\sum_k \mu_{jk} e_k\right) \times f_j = \sum_{j,k} \mu_{jk}(e_k \times f_j).$$

这証明：$\mathfrak{P}$里任意向量是向量$e_i \times f_j$的左綫性組合. 次設$\sum \gamma_{ij}(e_i \times f_j) = 0$，則$0 = \sum(\gamma_{ij} e_i) \times f_j = \sum_j \left(\sum_i \gamma_{ij} e_i\right) \times f_j$. 因为$f_j$都是綫性无关的，这就給出$\sum_i \gamma_{ij} e_i = 0\ (j = 1, 2, \cdots, m)$. 所以，每个$\gamma_{ij} = 0$.

如果$\mathfrak{R}$是$\Delta$上一个右空間，而$\mathfrak{S}$是$\Delta$上双側空間，則可应用类似的討論. 此时，$\mathfrak{P} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$可由定义

(10) $$(\sum x_i \times y_i)\alpha = \sum x_i \times y_i \alpha$$

而轉化为$\Delta$上一个右空間. 关于右維数的积关系也成立.

如果$\mathfrak{R}$及$\mathfrak{S}$都是$\Delta$上双側向量空間，則由使用(9)及(10)可使$\mathfrak{P}$轉化为$\Delta$上一个左及右向量空間. 因为我們已知，这样定义的任意左乘法可与任意右乘法交換；所以$\mathfrak{P}$是一个双側向量空間.

通常定义一个双側向量空間$\mathfrak{R}$到另一个双側向量空間$\mathfrak{S}$内的一个**綫性变换**是$\mathfrak{R}$到$\mathfrak{S}$内的一个映照，它对于左向量空間$\mathfrak{R}$，$\mathfrak{S}$是綫性的，并且对于右向量空間$\mathfrak{R}$，$\mathfrak{S}$也是綫性的. 仿此，如果存在有$\mathfrak{R}$到$\mathfrak{S}$上的一个1—1綫性变换，則$\mathfrak{R}$与$\mathfrak{S}$看作是**等价**的.

今設$\mathfrak{R}$，$\mathfrak{S}$及$\mathfrak{T}$是三个双側$\Delta$-空間，而考虑双側空間$\mathfrak{R} \times (\mathfrak{S} \times \mathfrak{T})$，这里$\times$表示直接积，它按指示的方式看作一个双側空間的. 这个空間的任意元素显然具有形状$\sum x_i \times (y_i \times z_i)$，这里$x_i \in \mathfrak{R}$，$y_i \in \mathfrak{S}$，$z_i \in \mathfrak{T}$. 同理，$(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}) \times \mathfrak{T}$的任意元素的形状为$\sum(x_i \times y_i) \times z_i$. 至此，我們要証$\sum x_i \times (y_i \times z_i) \to \sum(x_i \times y_i) \times z_i$定义$\mathfrak{R} \times (\mathfrak{S} \times \mathfrak{T})$到$(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}) \times \mathfrak{T}$上的一个1—1綫性变換. 要达到这个目的，設在$\mathfrak{R} \times (\mathfrak{S} \times \mathfrak{T})$里有一个关系$\sum x_i \times (y_i \times z_i) = 0$. 則可写下$x_i = \sum e_j \alpha_{ji}$及$z_i = \sum \beta_{ik} g_k$，这

里 $e_j$ 是右綫性无关的，而 $g_k$ 是左綫性无关的。如果代入关系里，則得

$$0=\sum_j e_j\times\sum_i \alpha_{ji}(y_i\times z_i)=\sum_j e_j\times\sum_i(\alpha_{ji}y_i\times z_i).$$

所以，$\sum_i \alpha_{ji}y_i\times z_i=0\quad(j=1,2,\cdots)$. 于是，

$$0=\sum_{i,k}(\alpha_{ji}y_i)\beta_{ik}\times g_k=\sum_k\sum_i(\alpha_{ji}y_i)\beta_{ik}\times g_k.$$

所以，对于所有 $j,k$，$\sum_i(\alpha_{ji}y_i)\beta_{ik}=0$. 故 $\sum_i \alpha_{ji}(y_i\beta_{ik})=0$，并由此可推得

$$0=\sum_j e_j\times\sum_i \alpha_{ji}(y_i\beta_{ik})=\sum_i\left(\sum_j e_j\alpha_{ji}\right)\times y_i\beta_{ik}$$

$$=\sum_i x_i\times y_i\beta_{ik}.$$

同理，这个关系給出关系 $\sum(x_i\times y_i)\times z_i=0$. 由直接驗証指出对应

$$\sum x_i\times(y_i\times z_i)\to\sum(x_i\times y_i)\times z_i$$

是 $\mathfrak{R}\times(\mathfrak{S}\times\mathfrak{T})$ 到 $(\mathfrak{R}\times\mathfrak{S})\times\mathfrak{T}$ 上的一个綫性变换. 由对称性还知这个映照的核是 0；所以，它是等价. 因为是等价，故在两个直接积 $\mathfrak{R}\times(\mathfrak{S}\times\mathfrak{T})$ 与 $(\mathfrak{R}\times\mathfrak{S})\times\mathfrak{T}$ 之間无須区別；因此这些积就只記作 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}\times\mathfrak{T}$，而把这个空間叫作三个空間 $\mathfrak{R},\mathfrak{S},\mathfrak{T}$ 的直接积. 积 $x\times(y\times z)$ 或 $(x\times y)\times z$ 也只記作 $x\times y\times z$.

我們可按类似方式定义三个以上的双側空間的直接积：按 $\mathfrak{R},\mathfrak{S},\cdots,\mathfrak{U}$ 的次序并結合各因子所得的任意两个直接积在关于三个因子的自然等价类型下是等价的；所以任意一个积空間都可記作 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}\times\cdots\times\mathfrak{U}$；而这个空間里的向量积可記作 $x\times y\times\cdots\times u$.

## 習 題 57

1. 令 $\alpha\longrightarrow\alpha^S$ 是域 $\Phi$ 到它自身內的一个同构，并令 $\mathfrak{R}$ 是 $\Phi$ 上一个左向量空間. 定义 $x\alpha=\alpha^S x$，并驗証：这使 $\mathfrak{R}$ 轉化为一个双側向量空間. 証明：如果象元素 $\alpha^S$ 的子域 $\Phi^S$ 是含于 $\Phi$ 里的眞子域，則 $\Phi$ 上 $\mathfrak{R}$ 的左及右維数不相同.

2. 令 $\mathfrak{R}$ 是 $\Delta$ 上一个双側向量空間使 $\Delta$ 上左維数与右維数都是有限而且相等。証明：存在有向量集合 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，同时是 $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}$ 的一个左基及一个右基。

3. 令 $\mathfrak{R}$ 是 $\Phi$ 上一个左向量空間，如第 1 題所定义，而 $S$ 是 $\Phi$ 里一个自同构，并令 $\mathfrak{S}$ 是由自同构 $T$ 定义的这个类型的另一个空間。証明：如果 $ST \neq TS$，則 $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ 与 $\mathfrak{S} \times \mathfrak{R}$ 不等价。

**4. 克伦内克积** 本章此后将假定 $\Delta = \Phi$ 是一个域；并且只討論单側向量空間，而把它們都写作左空間。 空間 $\mathfrak{R}$ 的共軛空間依通例記作 $\mathfrak{R}^*$，但这个空間也是看作一个左空間。

今設 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{S}$ 是 $\Phi$ 上两个空間。 暂时取 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{S}$ 为双側向量空間，亦即按通常办法对于所有 $\alpha$ 与 $x$ 命 $\alpha x = x\alpha$，并作直接积 $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$。 这也是一个双側向量空間，而且是平凡种类的双側向量空間，因为

$$
\begin{aligned}
\alpha(\sum x_i \times y_i) &= \sum \alpha x_i \times y_i \\
&= \sum x_i\alpha \times y_i = \sum x_i \times \alpha y_i \\
&= \sum x_i \times y_i\alpha = \sum (x_i \times y_i)\alpha.
\end{aligned}
$$

所以，$\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ 可只看作一个左向量空間。这样得出的(左)向量空間叫做 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{S}$ 的克伦内克积。 由左向量空間的观点来說，上面方程里重要的部分是

$$\alpha(\sum x_i \times y_i) = \sum \alpha x_i \times y_i = \sum x_i \times \alpha y_i.$$

于是，空間 $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ 有下列的特性：对于每个 $x \in \mathfrak{R}$ 及 $y \in \mathfrak{S}$ 定义一个积 $x \times y \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$，使

1′. $(x_1 + x_2) \times y = x_1 \times y + x_2 \times y$,
$x \times (y_1 + y_2) = x \times y_1 + x \times y_2$.

2′. $\alpha(x \times y) = \alpha x \times y = x \times \alpha y$.

3′. $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ 的每个元素的形状是 $\sum x_i \times y_i$，这里 $x_i \in \mathfrak{R}$，$y_i \in \mathfrak{S}$.

4′. (a) $\sum x_i \times y_i = 0$ 可推得 $y_i$ 是綫性相关的，或所有 $x_i$ 等于 0.

(b) $\sum x_i \times y_i = 0$ 可推得 $x_i$ 是綫性相关的，或所有 $y_i$ 等于 0.

前面的討論曾建立了任意两个(有限維)向量空間的克伦内克

积的存在性[1]. 我們所得結果的大部分可应用于目前情况，特别是有 $\dim(\mathfrak{R}\times\mathfrak{S})=\dim\mathfrak{R}\dim\mathfrak{S}$. 今将指出：这个方程可用以代替无关性条件 4′；这因为有下面的定理.

**定理 3.** 令 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ 及 $\mathfrak{P}$ 是域 $\Phi$ 上向量空間，并設定义一个積 $x\times y$，它適合條件 1′, 2′, 及 3′，这里 $x\in\mathfrak{R}$, $y\in\mathfrak{S}$, 而 $x\times y\in\mathfrak{P}$, 則 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{S}$ 的一个克倫內克積必須而且只須 $\dim\mathfrak{P}=\dim\mathfrak{R}\dim\mathfrak{S}$.

証 这个条件的必要性已曾証明过. 反过来，令 $\dim\mathfrak{P}=\dim\mathfrak{R}\dim\mathfrak{S}$. 令 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基，并令 $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个基，則易知向量 $e_i\times f_j$ 是 $\mathfrak{P}$ 的生成元素. 因为它們的个数是 $nm$，所以构成一个基. 今設 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是 $\mathfrak{R}$ 里綫性无关向量，則可假定它們是 $\mathfrak{R}$ 的基的一部分. 如果 $\sum e_i\times y_i=0$，則可写下 $y_i=\sum\beta_{ij}f_j$ 而得 $\sum\beta_{ij}e_i\times f_j=0$. 于是，每个 $\beta_{ij}=0$，这就意味着每个 $y_i=0$. 仿此可証第二个无关性条件.

我們已知，双側向量空間的直接乘法是可結合的，而特别在克伦內克积也是成立. 因此，如果 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ 及 $\mathfrak{T}$ 是域上三个向量空間，則有 $\mathfrak{R}\times(\mathfrak{S}\times\mathfrak{T})$ 到 $(\mathfrak{R}\times\mathfrak{S})\times\mathfrak{T}$ 上的自然等价 $\sum x_i\times(y_i\times z_i)\to\sum(x_i\times y_i)\times z_i$. 故可把这两个空間迭合，而把元素 $\sum x_i\times(y_i\times z_i)$ 与 $\sum(x_i\times y_i)\times z_i$ 迭合. 我們也可与前面一样，把它們的記法簡化而写为 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}\times\mathfrak{T}$ 及 $x\times y\times z$. 我們可更一般地定义任意有限个空間的克伦內克积 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}\times\cdots\times\mathfrak{U}$，并以 $\sum x\times y\times\cdots\times u$ 表示它的元素.

双側空間的直接乘法通常不是可交换的[2]；但在克伦內克积的这个特殊情形，交换律成立. 事实上，我們可証得 $\sum x_i\times y_i\to\sum y_i\times x_i$ 定义 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{S}\times\mathfrak{R}$ 上的一个等价. 这个結果的証明可效法其它証明得出：把 $x_i$ 及 $y_i$ 用綫性无关元素列出，則可証 $\sum x_i\times y_i=0$ 成立必須而且只須 $\sum y_i\times x_i=0$. 余下的論点就是驗証这个說法. 更一般地說，如果 $(j_1, j_2, \cdots, j_r)$ 是 $(1, 2, \cdots.$

1) 在第九章里将看到这个結果在无限維空間里也成立.

2) 參看习題 57 的第 3 題.

$s$)的任意排列，则克伦内克积 $\mathfrak{R}^{(1)}\times\mathfrak{R}^{(2)}\times\cdots\times\mathfrak{R}^{(s)}$ 与 $\mathfrak{R}^{(j_1)}\times\mathfrak{R}^{(j_2)}\times\cdots\times\mathfrak{R}^{(j_s)}$ 等价，而 $\sum x_i^{(1)}\times x_i^{(2)}\times\cdots\times x_i^{(s)}\to\sum x_i^{(j_1)}\times x_i^{(j_2)}\times\cdots\times x_i^{(j_s)}$ 是一个等价映照.

向量空間的克伦内克积的概念导致有用的一个自由(結合)代数学的概念的定义. 要定义这个概念，我們从域 $\Phi$ 上一个任意向量空間 $\mathfrak{R}$ 出发，并引入克伦内克积 $\mathfrak{R}_0^i\equiv\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}\times\cdots\times\mathfrak{R}$ ($i$ 个因子)，并規定 $\mathfrak{R}_0^1=\mathfrak{R}$ 及 $\mathfrak{R}_0^0=\Phi$；于是对于所有 $i=0,1,2,\cdots$，$\mathfrak{R}_0^i$ 是确定的. 由上面結合性的說明知，如果 $i,j\geqslant 1$，则 $\mathfrak{R}_0^i\times\mathfrak{R}_0^j=\mathfrak{R}_0^{i+j}$. 于是，任意 $x^{(i)}\in\mathfrak{R}_0^i$，$x^{(j)}\in\mathfrak{R}_0^j$ 决定 $\mathfrak{R}_0^{i+j}$ 的一个向量 $x^{(i)}\times x^{(j)}$. 如果 $i=0$ 或 $j=0$，则定义 $x^{(i)}\times x^{(j)}$ 是 $x^{(j)}$ (或 $x^{(i)}$) 与域元素 $x^{(i)}$ (或 $x^{(j)}$) 的积. 今作空間 $\mathfrak{R}_0^i$ 的**直接和** $\mathfrak{F}$. 这个空間可定义为序列 $x=(x^{(0)},x^{(1)},x^{(2)},\cdots)$ 的集合，这里 $x^{(i)}\in\mathfrak{R}_0^i$，而对于充分大的 $i$ $x^{(i)}=0$. 令 $y\equiv(y^{(0)},y^{(1)},y^{(2)},\cdots)$，規定 $x=y$ 必須而且只須 $x^{(i)}=y^{(i)}$ ($i=0,1,2,\cdots$). 对于任意 $x$ 及 $y$ 定义

$$(11)\qquad \left.\begin{aligned} x+y&=(x^{(0)}+y^{(0)},x^{(1)}+y^{(1)},\cdots),\\ \alpha x&=(\alpha x^{(0)},\alpha x^{(1)},\alpha x^{(2)},\cdots),\end{aligned}\right\}$$

则 $\mathfrak{F}$ 显然是一个向量空間. 如果把向量 $(0,\cdots,0,x^{(i)},0,\cdots)$ 与 $x^{(i)}$ 看作相同，则 $\mathfrak{F}$ 里任意向量可有一种而且只有一种方法写成 $\sum_{i=0}^{\infty}x^{(i)}$，这里 $i$ 充分大时 $x^{(i)}=0$. 如果 $i_j$ 是不相同的，并且 $x^{(i_j)}\neq 0$，则这些向量是綫性无关的. 所以，如果 $\mathfrak{R}\neq 0$，则 $\mathfrak{F}$ 是无限維空間.

今在 $\mathfrak{F}$ 里由定义 $(\sum x^{(i)})\times(\sum y^{(i)})=\sum z^{(k)}$ 引入乘法 $\times$，这里

$$(12)\qquad z^{(k)}=x^{(0)}\times y^{(k)}+x^{(1)}\times y^{(k-1)}+\cdots+x^{(k)}\times y^{(0)}.$$

容易驗証：$\mathfrak{F}$ 是一个結合代数. 这个代数叫做建立在向量空間上的**自由(結合)代数**.

## 習 題 58

1. 証明：如果 $\mathfrak{R}$ 是一維空間，则 $\mathfrak{F}$ 实质上是 $\Phi$ 上含有一个不定量(超越元素)的多項式代数.

2. 令 $\mathfrak{F}$ 是建立在 $n$ 維向量空間 $\mathfrak{R}$ 上的自由代数，并令 $\mathfrak{B}$ 是由向量 $x\times y - y\times x$ 生成的 $\mathfrak{F}$ 里(双側)理想，这里 $x$ 及 $y$ 都 $\in\mathfrak{R}$. 証明：$\mathfrak{F}/\mathfrak{B}$ 实质上是含有 $n$ 个代数无关的超越元素的多項式代数.

3. 令 $\mathfrak{F}$ 是建立在 $n$ 維向量空間 $\mathfrak{R}$ 上的自由代数. 設 $\Phi$ 的特征数 $\neq 2$，并令 $\mathfrak{G}$ 是由向量 $x\times y + y\times x$ 生成的 $\mathfrak{F}$ 里理想，这里 $x, y\in\mathfrak{R}$. 則 $\mathfrak{F}/\mathfrak{G}$ 叫做建立在 $\mathfrak{R}$ 上的格拉斯曼 (Grassmann) 代数，或外代数. 証明：$\dim \mathfrak{F}/\mathfrak{G} = 2^n$.

4. 如果 $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \cdots, \mathfrak{U}$ 是 $\Phi$ 上向量空間，則 $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \cdots, \mathfrak{U}$ 上多綫性函数是函数 $f(x, y, \cdots, u)$，这里 $x\in\mathfrak{R}, y\in\mathfrak{S}, \cdots, u\in\mathfrak{U}$，而函数值 $\in\Phi$，并且当任意一个变量除外而其余变量取固定值时，$f$ 是这个变量的綫性函数. 証明：1)如果 $f$ 是多綫性函数，則 $\sum x_i\times y_i\times\cdots\times u_i\longrightarrow\sum f(x_i, y_i, \cdots, u_i)$ 是 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}\times\cdots\times\mathfrak{U}$ 的共軛空間的一个元素；2)如果 $f$ 是 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}\times\cdots\times\mathfrak{U}$ 的一个綫性函数，則 $f$ 对于形状如 $x\times y\times\cdots\times u$ 的向量子集合的短縮是一个多綫性函数. 由此証明多綫性函数的概念与 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}\times\cdots\times\mathfrak{U}$ 的綫性函数的概念等价.

5. 令 $g(x), h(y), \cdots, k(u)$ 分别 $\in\mathfrak{R}^*, \mathfrak{S}^*, \cdots, \mathfrak{U}^*$. 証明：$f(x, y, \cdots, u)\equiv g(x)h(y)\cdots k(u)$ 是多綫性函数. 令 $f$ 也表示 $(\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}\times\cdots\times\mathfrak{U})^*$ 的相伴元素. 証明：$\sum g\times h\times\cdots\times k\longrightarrow\sum f$ 定义 $\mathfrak{R}^*\times\mathfrak{S}^*\times\cdots\times\mathfrak{U}^*$ 到 $(\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}\times\cdots\times\mathfrak{U})^*$ 上的一个等价.

**5. 綫性变换及陣的克伦内克积** 如果 $A$ 是 $\mathfrak{R}$ 里一个綫性变换，而 $B$ 是 $\mathfrak{S}$ 里一个綫性变换，則知 $\sum x_i\times y_i\rightarrow\sum x_iA\times y_iB$ 是 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}$ 里一个羣同态. 这个映照与純量乘法是可交换，也是显然的，所以它是綫性映照. 这个映照叫做 $A$ 与 $B$ 的**克伦内克积** $A\times B$. 同理可定义若干个綫性变换的克伦内克积 $A\times B\times\cdots\times D$. 今将証：关于克伦内克乘法，$\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}$ 里綫性变换的向量空間 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}, \mathfrak{R}\times\mathfrak{S})$ 是一个克伦内克积 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})\times\mathfrak{L}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$. 方程(5)指出分配律成立. 还有

$$\begin{aligned}(x\times y)(\alpha(A\times B)) &= (xA\times yB)\alpha\\ &= (xA)\alpha\times yB = x(A\alpha)\times yB.\end{aligned}$$

所以，$\alpha(A\times B) = \alpha A\times B$. 同理有 $\alpha(A\times B) = A\times\alpha B$. 次令 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基，而 $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个基，則 $nm$ 个向量 $e_i\times f_j$ 构成 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}$ 的一个基. 令 $E_{ii',jj'}$ 是 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}$ 的綫性变换，它把 $e_i\times f_j$ 映到 $e_{i'}\times f_{j'}$ 而把其余的 $e_k\times f_l$ 映到 0，則可驗証

$$E_{ii',jj'} = E_{ii'}\times F_{jj'}, \tag{13}$$

这里 $E_{ii'}$ 是 $\mathfrak{R}$ 里綫性变换把 $e_i$ 映到 $e_{i'}$，而把其余的 $e$ 映到 0，$F_{jj'}$ 是 $\mathfrak{S}$ 里綫性变换，它把 $f_j$ 映到 $f_{j'}$，而把其余的 $f$ 映到 0. 所以，

$\mathfrak{L}(\mathfrak{R}\times\mathfrak{S},\mathfrak{R}\times\mathfrak{S})$ 的每个元素的形状是 $\sum A_i\times B_i$，这里 $A_i\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$，$B_i\in\mathfrak{L}(\mathfrak{S},\mathfrak{S})$. 因为 $\dim\mathfrak{L}(\mathfrak{R}\times\mathfrak{S},\mathfrak{R}\times\mathfrak{S})=(mn)^2=\dim\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})\dim\mathfrak{L}(\mathfrak{S},\mathfrak{S})$，故由定理 3 得出了我們的論断. 所以就証明了下面的定理.

**定理 4.** 如果 $\mathfrak{R}$ 及 $\mathfrak{S}$ 是(有限維)向量空間，則空間 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}\times\mathfrak{S},\mathfrak{R}\times\mathfrak{S})$ 等于 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})\times\mathfrak{L}(\mathfrak{S},\mathfrak{S})$，後者是關于綫性變換的克倫內克乘法.

今設

$$e_iA=\sum\alpha_{ij}e_j,\quad f_kB=\sum\beta_{kl}f_l,\tag{14}$$

則 $(\alpha)$ 与 $(\beta)$ 順序是 $A$ 与 $B$ 关于所选的基的陣. 于是，

$$(e_i\times f_k)(A\times B)=\sum\alpha_{ij}\beta_{kl}e_j\times f_l.\tag{15}$$

今把向量 $e_i\times f_k$ 依字典的編次如

$$(e_1\times f_1,\cdots,e_1\times f_m;\ e_2\times f_1,\cdots,e_2\times f_m;\ \cdots;\ \cdots,e_n\times f_m),$$

并把这个有序基叫做 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 与 $(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ 的**連帶基**. 方程(15)指出，$A\times B$ 关于这个連帶基的陣是

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}
\alpha_{11}\beta_{11} & \cdots & \alpha_{11}\beta_{1m} & \alpha_{12}\beta_{11} & \cdots & \alpha_{12}\beta_{1m} & \cdots\ \alpha_{1n}\beta_{1m}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
\alpha_{11}\beta_{m1} & \cdots & \alpha_{11}\beta_{mm} & \alpha_{12}\beta_{m1} & \cdots & \alpha_{12}\beta_{mm} & \cdots\ \alpha_{1n}\beta_{mm}\\
\hline
\alpha_{21}\beta_{11} & \cdots & \alpha_{21}\beta_{1m} & \alpha_{22}\beta_{11} & \cdots & \alpha_{22}\beta_{1m} & \cdots\ \alpha_{2n}\beta_{1m}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
\alpha_{21}\beta_{m1} & \cdots & \alpha_{21}\beta_{mm} & \alpha_{22}\beta_{m1} & \cdots & \alpha_{22}\beta_{mm} & \cdots\ \alpha_{2n}\beta_{mm}\\
\hline
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}\right).$$

这个陣叫做 $(\alpha)$ 与 $(\beta)$ 的**克伦内克积**，而記作 $(\alpha)\times(\beta)$.

支配綫性变换的克伦内克积的基本法則在陣方面有它們的相应法則. 特別是前面定理指出：$\Phi$ 上 $nm\times nm$ 陣的空間是 $\Phi$ 上 $n\times n$ 陣的空間与 $\Phi$ 上 $m\times m$ 陣的空間的克伦内克积. 我們还知道，在綫性变换方面 $(A\times B)(C\times D)=AC\times BD$ 成立，而这直接导致陣的法則

$$((\alpha)\times(\beta))((\gamma)\times(\delta))=(\alpha)(\gamma)\times(\beta)(\delta).\tag{16}$$

## 習 題 59

1. 証明：$A \times B$ 关于基 $(e_1 \times f_1, e_2 \times f_1, \cdots, e_n \times f_1; e_1 \times f_2, e_2 \times f_2, \cdots, e_n \times f_2, \cdots; \cdots, e_n \times f_m)$ 的陣是 $(\beta) \times (\alpha)$. 于是，証明：$(\beta) \times (\alpha)$ 与 $(\alpha) \times (\beta)$ 相似.

2. 証明：$(\alpha) \times ((\beta) \times (\gamma)) = ((\alpha) \times (\beta)) \times (\gamma)$.

3. 証明：如果 $\rho$ 是 $A$ 的特征多項式的一个根，而 $\sigma$ 是 $B$ 的特征多項式的一个根，則 $\rho\sigma$ 是 $A \times B$ 的特征多項式的一个根.

4. 証明：$\det(A \times B) = (\det A)^m (\det B)^n$.

**6. 张量空間** 如果 $\mathfrak{R}$ 是一个向量空間，而 $\mathfrak{R}^*$ 是 $\mathfrak{R}$ 的共軛空間，則任意克伦內克积空間 $\mathfrak{R} \times \cdots \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^* \times \cdots \times \mathfrak{R}^*$ 叫做建立于空間 $\mathfrak{R}$ 上的张量空間. 这样空間的元素叫做张量；并且如果有 $r$ 个因子为 $\mathfrak{R}$ 及 $s$ 个因子为 $\mathfrak{R}^*$，則說这些张量是 $r$ 秩逆变及 $s$ 秩协变的. 我們用簡記法 $\mathfrak{R}_s^r$ 表这个空間. 为方便起見，也象 §4 一样，把 $\Phi$ 看作 0 秩张量空間 $\mathfrak{R}_0^0$.

如果 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是基空間 $\mathfrak{R}$ 的一个基，而 $(e^1, e^2, \cdots, e^n)$[1] 是 $\mathfrak{R}^*$ 的余基，亦即

$$e^j(e_i) = \delta_i^j,$$

这里 $\delta_i^j$ 是克伦內克的 $\delta$，則向量

$$e_{i_1} \times e_{i_2} \times \cdots \times e_{i_r} \times e^{j_1} \times \cdots \times e^{j_s} \tag{17}$$

构成张量空間的一个基. 这个空間里任意向量可写为

$$\sum \xi_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \times \cdots \times e_{i_r} \times e^{j_1} \times \cdots \times e^{j_s}. \tag{18}$$

我們自然欢迎由 $\mathfrak{R}$ 的基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 决定的这个类型的基. 张量空間的元素(18)叫做关于 $\mathfrak{R}$ 里 $(e)$ 基的坐标是 $\xi_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r}$ 的张量. 如果 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的另一个基，而 $f_i = \sum \mu_i^j e_j$，則

$$e_j = \sum \nu_j^i f_i, \quad f^i = \sum \nu_j^i e^j, \quad e^j = \sum \mu_i^j f^i,$$

这里 $(\nu)$ 是陣 $(\mu)$ 的逆陣. 于是，

$$\sum \xi_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \times \cdots \times e_{i_r} \times e^{j_1} \times \cdots \times e^{j_s}$$
$$= \sum \xi_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} \nu_{i_1}^{k_1} \cdots \nu_{i_r}^{k_r} \mu_{l_1}^{j_1} \cdots \mu_{l_s}^{j_s} f_{k_1} \times \cdots \times f_{k_r}$$

---

1) 这个記法比以前的記法 $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ 有更多的方便.

$\times f^{l_1} \times \cdots \times f^{l_s}$.

故上面的张量关于 $(f)$-基的坐标是

(19) $$\eta_{l_1 \cdots l_s}^{k_1 \cdots k_r} = \sum \xi_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} \nu_{i_1}^{k_1} \cdots \nu_{i_r}^{k_r} \mu_{l_1}^{j_1} \cdots \mu_{l_s}^{j_s}.$$

次考虑綫性变换的折轉的概念的扩张．我們已知，如果 $A$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意綫性变换，则 $A$ 的折轉变换 $A^*$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 里映照 $x^* \to y^*$，这里 $y^*(x) = x^*(xA)$．今将綫性变换 $A_s^r \equiv \overbrace{A \times \cdots \times A}^{r} \times \overbrace{A^* \times \cdots \times A^*}^{s}$ 与 $A$ 相伴；自然就把这个变换考虑为 $A$ 在张量空間 $\mathfrak{R}_s^r$ 里的誘导变换．我們知道，如果 $(\alpha)$ 是 $A$ 关于基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣，则 $(\alpha)'$ 是 $A^*$ 关于余基 $(e^1, e^2, \cdots, e^n)$ 的陣．故 $A_s^r$ 关于字典式次序的自然基（17）的陣是克伦內克积 $\overbrace{(\alpha) \times \cdots \times (\alpha)}^{r} \times \overbrace{(\alpha)' \times \cdots \times (\alpha)'}^{s}$．

有一个重要方法使 $r-1\ (\geqslant 0)$ 秩逆变及 $s-1\ (\geqslant 0)$ 秩协变的一个张量与 $r$ 秩逆变及 $s$ 秩协变的任意张量相伴，这个方法叫做短縮．首先我們知道，如果 $x \in \mathfrak{R}$ 而 $y^* \in \mathfrak{R}^*$，则映照 $(x, y^*) \to y^*(x)$ 是結連 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}^*$ 的一个双綫性形式．因为 $\Phi$ 是可交换的，所以，这个形式按 §1 的說明定义向量空間 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}^*$ 的一个积．所以，由定理 1 知，映照 $\sum x_i \times y_i^* \to \sum y_i^*(x_i)$ 是 $\mathfrak{R}_1^1 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^*$ 到加法羣 $\Phi$ 上的一个同态．我們还立得：这个对应是 $\mathfrak{R}_1^1$ 到一維向量空間 $\Phi(=\mathfrak{R}_0^0)$ 上的一个綫性变换．

§1 的討論还指出：如果 $\mathfrak{S}$ 是另一个向量空間，则 $\mathfrak{R}_1^1$ 到 $\mathfrak{R}_0^0$ 上的綫性映照可与 $\mathfrak{S}$ 里恆等映照組合給出 $\mathfrak{R}_1^1 \times \mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{R}_0^0 \times \mathfrak{S}$ 上的一个綫性映照．我們用下面法則

$$\sum x_i \times y_i^* \times z_i \to \sum y_i^*(x_i) \times z_i$$

定义积映照，这里 $x_i \in \mathfrak{R}$，$y_i^* \in \mathfrak{R}^*$，$z_i \in \mathfrak{S}$．我們易知，空間 $\mathfrak{R}_0^0 \times \mathfrak{S}$ 在映照 $\sum \alpha_i \times z_i \to \sum \alpha_i z_i$ 下等价于 $\mathfrak{S}$．故知，

(20) $$\sum x_i \times y_i^* \times z_i \to \sum y_i^*(x_i) z_i$$

是 $\mathfrak{R}_1^1 \times \mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{S}$ 上的一个綫性变换．

把 $\mathfrak{S}$ 特殊化为张量空間 $\mathfrak{R}^{r-1}_{s-1}$ 得出短縮方法. 这样特殊化直接指出：映照

$$\sum x\times y^*\times x_1\times\cdots\times x_{r-1}\times y_1^*\times y_2^*\times\cdots\times y_{s-1}^*$$
$$\to\sum y^*(x)x_1\times\cdots\times x_{r-1}\times y_1^*\times\cdots\times y_{s-1}^*$$ [1)]

是 $\mathfrak{R}^1_1\times\mathfrak{R}^{r-1}_{s-1}$ 到 $\mathfrak{R}^r_s$ 上的一个綫性映照. 今令 $k$ 是从 $1, 2, \cdots, r$ 里选取，而 $l$ 是从 $1, \cdots, s$ 里选取，則知映照

$$\sum x_1\times\cdots\times x_r\times y_1^*\times\cdots\times y_s^*$$
$$\to\sum x_k\times y_l^*\times x_1\times\cdots\times x_{k-1}\times x_{k+1}\times\cdots$$
$$\times x_r\times y_1^*\times\cdots\times y_{l-1}^*\times y_{l+1}^*\times\cdots\times y_s^*$$

是 $\mathfrak{R}^r_s$ 到 $\mathfrak{R}^1_1\times\mathfrak{R}^{r-1}_{s-1}$ 上的一个等价. 所以，映照

$$\sum x_1\times\cdots\times x_r\times y_1^*\times\cdots\times y_s^*\tag{21}$$
$$\to\sum y_l^*(x_k)x_1\times\cdots\times x_{k-1}\times x_{k+1}\times\cdots$$
$$\times x_r\times y_1^*\times\cdots\times y_{l-1}^*\times y_{l+1}^*\times\cdots\times y_s^*$$

是 $\mathfrak{R}^r_s$ 到 $\mathfrak{R}^{r-1}_{s-1}$ 上的一个綫性变换. 这个映照叫做 $\mathfrak{R}^r_s$ **对于第 $k$ 个逆变指标及第 $l$ 个协变指标的短縮**.

今用 $\mathfrak{R}^r_s$ 的一个基 $e_{i_1}\times\cdots\times e_{i_r}\times e^{j_1}\times\cdots\times e^{j_s}$ 而考虑张量(18). 对于第 $k$ 个逆变指标及第 $l$ 个协变指标的短縮給出张量

$$\sum\xi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\delta^{j_l}_{i_k}e_{i_1}\times\cdots\times e_{i_{k-1}}\times e_{i_{k+1}}\times\cdots\times e_{i_r}\times$$
$$e_{j_1}\times\cdots\times e^{j_{l-1}}\times e^{j_{l-1}}\times\cdots\times e^{j_s}.$$

所以，短縮张量关于由 $\mathfrak{R}$ 里 $(e)$-基所决定的基的坐标是

$$\xi^{i_1\cdots i_{k-1}i_{k+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{l-1}j_{l+1}\cdots j_s}=\sum_q\xi^{i_1\cdots i_{k-1}q i_{k+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{l-1}q j_{l+1}\cdots j_s}.\tag{22}$$

短縮的概念可用以給出一个綫性变换的跡的定义，它与基无关. 首先注意到 $\mathfrak{R}$ 里綫性变换的空間 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ 可看作张量空間 $\mathfrak{R}^1_1$；这由直接积的作法（§ 1）可以明白. 因为，如果 $x\in\mathfrak{R}$，而 $y^*\in\mathfrak{R}^*$，則我們曾定义 $x\times y^*$ 是 $\mathfrak{R}$ 到它自身内的綫性变换，它把向量 $u$ 映到 $y^*(u)x$. 我們知道，关于 $\times$ 的这个定义，$\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})=\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}^*$.

---

1) 这里略去求和号的下标，我們理会是对所显出的这个类型的項的和.

所以，$\mathfrak{L}$ 的任意元素可写成 $\sum x_i \times y_i^*$ 的形状．故我們所定义的短縮是 $\mathfrak{L}$ 到 $\Phi$ 内的一个綫性映照，它把 $\sum x_i \times y_i^*$ 映到 $\sum y_i^*(x_i)$．今将証明：这个映照与由 $\mathfrak{R}$ 的基定义的映照 $A \to \operatorname{tr} A$ 重合．

要証这个結果，令 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基，并記 $A = \sum u_i^* \times e_i$，則

$$e_j A = \sum_i u_i^*(e_j) e_i.$$

所以，$A$ 关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣是 $(\alpha) \equiv (u_i^*(e_j))$．故 $\operatorname{tr} A = \sum u_i^*(e_i)$．这与由短縮得出的結果相同．基改变就得 $A$ 的另一个陣与 $(\alpha)$ 相似．它的跡与张量的短縮重合．故无須（象以前那样）用直接計算去驗証这个事实，就可知道：相似陣有相同的迹．

**7. 张量的对称类** 本节講述 $r$ 秩逆变张量的空間 $\mathfrak{R}_0^r$．这个空間的元素是张量 $\sum x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_r$．令 $i \to i'$ 是数 $1, 2, \cdots, r$ 的任意排列，則知映照

$$\sum x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_r \to \sum x_{1'} \times x_{2'} \times \cdots \times x_{r'}$$

是 $\mathfrak{R}_0^r$ 里一个 (1—1) 綫性变换．这个变换叫做 $\mathfrak{R}_0^r$ 里一个**对称变换**．$r$ 个文字 $1, 2, \cdots, r$ 的对称羣 $\mathfrak{S}_r$ 里每个元素各与这些变换中一个联系．如果 $\sigma \in \mathfrak{S}_r$，則 $\mathfrak{R}_0^r$ 里相伴的映照記作 $P(\sigma)$，故由定义显然有

$$P(\sigma\tau) = P(\sigma)P(\tau). \tag{23}$$

令 $\alpha_\sigma$ 表示用元素 $\alpha_\sigma$ 作的純量乘法，則如 $\sum \alpha_\sigma P(\sigma)$ 形的綫性变换叫做 $\mathfrak{R}_0^r$ 的一个**对称算子**．由(23)知：这些算子构成 $\mathfrak{R}_0^r$ 里綫性变換的完全代数的一个子代数．如果 $Q$ 是一个对称算子，則被 $Q$ 零化的向量的集合是一个子空間；更一般地說，如果 $\{Q\}$ 是对称算子的任意集合，則对于所有 $Q$ 使 $zQ = 0$ 的各个向量 $z$ 成一个子空間；这个子空間叫做张量的一个**对称类**．例如，令集合 $\{Q\}$ 是对称算子 $P(\sigma) - 1 \equiv P(\sigma) - P(1) (\sigma \in \mathfrak{S}_r)$ 的全体，則这个对称类的张量是**对称的**，亦即对于 $1, 2, \cdots, r$ 的任意排列 $i \to i'$ 有

$$\sum x_{1'} \times x_{2'} \times \cdots \times x_{r'} = \sum x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_r.$$

仿此，如果 $\{Q\}$ 是对称算子 $P(\sigma)-\varepsilon_\sigma$ 的集合，这里 $\sigma$ 是偶排列时，取 $\varepsilon_\sigma=1$，而 $\sigma$ 是奇排列时取 $\varepsilon_\sigma=-1$，則集合 $\{Q\}$ 决定斜称张量的类．亦即对于 $\sigma$: $i\to i'$ 具有

$$\sum x_{1'}\times x_{2'}\times\cdots\times x_{r'}=\varepsilon_\sigma\sum x_1\times x_2\times\cdots\times x_r$$

的张量的类．

对称算子在研究由基空間 $\mathfrak{R}$ 里綫性变换誘导出的 $\mathfrak{R}_0^r$ 里綫性变换是特别重要的．如果 $A$ 是 $\mathfrak{R}$ 里这样一个变换，则由公式

$$(\sum x_1\times x_2\times\cdots\times x_r)A_0^r=\sum x_1A\times x_2A\times\cdots\times x_rA$$

来定义"誘导"綫性变换 $A_0^r\equiv A\times A\times\cdots\times A$．显然有关系

$$(AB)_0^r=A_0^rB_0^r. \tag{24}$$

因为 $1_0^r=1$，所以，如果 $A$ 有一个逆变换 $A^{-1}$，则 $A_0^r(A^{-1})_0^r=1_0^r=1$．于是，如果 $A$ 是满秩的，则 $A_0^r$ 在 $\mathfrak{R}^r$ 的綫性变换环 $\mathfrak{L}_0^r$ 里是满秩的．方程(24)指出：映照 $A\to A_0^r$ 是 $\mathfrak{L}$ 的单位羣到 $\mathfrak{L}_0^r$ 的单位羣里的一个同态．

由定义显然知，$A_0^r$ 与每个对称变换可交换，因此也与每个对称算子 $Q$ 可交换．如果 $zQ=0$，则 $(zA_0^r)Q=0$．这个提示指出，张量的任意对称类关于 $A_0^r$ 形状的映照的全体是一个不变子空間．如果 $U(A)$ 表示 $A_0^r$ 在一个特别对称类里的誘导綫性变换，则由(24)得关系 $U(AB)=U(A)U(B)$．

今将誹述斜称张量的对称类的特殊情形．我們也假定 $\Phi$ 的特征数 $\neq 2$．首先决定这个对称类的一个基．令

$$\sum\xi^{i_1i_2\cdots i_r}e_{i_1}\times e_{i_2}\times\cdots\times e_{i_r}$$

是斜称张量，则

$$\begin{aligned}\sum\xi^{i_1i_2\cdots i_r}&e_{i_{1'}}\times e_{i_{2'}}\times\cdots\times e_{i_{r'}}\\&=\varepsilon_\sigma\sum\xi^{i_1i_2\cdots i_r}e_{i_1}\times e_{i_2}\times\cdots\times e_{i_r},\end{aligned} \tag{25}$$

又因为 $\varepsilon_\sigma^{-1}=\varepsilon_\sigma$，这就推得

$$\xi^{i_{1'}i_{2'}\cdots i_{r'}}=\varepsilon_\sigma\xi^{i_1i_2\cdots i_r}. \tag{26}$$

所以，任意两个下标互换就改变支量 $\xi^{i_1i_2\cdots i_r}$ 的符号．这个結果的一个推論是：如果任意两个 $i_j$ 相等，则 $\xi^{i_1i_2\cdots i_r}=0$．特别是，如果 $r>n$，则每个 $\xi^{i_1i_2\cdots i_r}=0$；亦即 $r(>n)$ 秩的斜称张量只有 0 张

量．我們还知，不論 $r$ 的值如何，斜称张量的表达式 $\sum \xi^{i_1 i_2 \cdots i_r} e_{i_1} \times \cdots \times e_{i_r}$ 里有两个 $i_j$ 相等的項 $e_{i_1} \times e_{i_2} \times \cdots \times e_{i_r}$ 的系数为 0．所以这些項可以去掉．次設 $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$，則系数 $\xi^{i_1' i_2' \cdots i_r'} = \varepsilon_\sigma \xi^{i_1 i_2 \cdots i_r}$．所以，包含所有基张量 $e_{i_{1'}} \times e_{i_{2'}} \times \cdots \times e_{i_{r'}}$ 的項合併为

$$(27) \qquad \xi^{i_1 i_2 \cdots i_r}[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}] \quad (i_1 < i_2 < \cdots < i_r),$$

这里

$$(28) \qquad [e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}] = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma e_{i_{1'}} \times e_{i_{2'}} \times \cdots \times e_{i_{r'}}.$$

$[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}]$ 显然是斜称的．还有，如果 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ 而 $(j_1, j_2, \cdots, j_r) \neq (i_1, i_2, \cdots, i_r)$，則 $[e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_r}]$ 含有基张量 $e_{j_{1'}} \times e_{j_{2'}} \times \cdots \times e_{j_{r'}}$ 的一个集合，它与集合 $e_{i_{1'}} \times e_{i_{2'}} \times \cdots \times e_{i_{r'}}$ 的交是空集合．所以，由 $1, 2, \cdots, n$ 中选取一切可能的下标 $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ 所决定的向量 $[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}]$ 是綫性无关的．于是，这些向量构成斜称张量的空間的一个基．这个基里元素的个数与由 $n$ 个不同事物里选取 $r$ 个不同事物的組合数相同．所以这个数目 $\binom{n}{r}$ 是这个空間的維数．

我們把向量按下标 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 作字典式編次．例如，如果 $n = 3$ 而 $r = 2$，則次序是 $[e_1 e_2]$，$[e_1 e_3]$，$[e_2 e_3]$．如果 $(\alpha)$ 是綫性变换 $A$ 关于基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣，則 $A$ 在 $r$ 秩斜称张量的空間里的誘导綫性变换关于字典式有序基 $[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}]$ 的陣叫做 $(\alpha)$ 的**第 $r$ 复合陣**，記作 $C_r(\alpha)$．显然有关系

$$(29) \qquad C_r((\alpha)(\beta)) = C_r(\alpha) C_r(\beta).$$

今将找 $C_r(\alpha)$ 的显形状．因为 $e_i A = \sum \alpha_{ij} e_j$，故

$$[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}] A_0^r = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma e_{i_{1'}} A \times e_{i_{2'}} A \times \cdots \times e_{i_{r'}} A$$

$$(30) \qquad \begin{aligned} &= \sum_\sigma \sum_j \varepsilon_\sigma \alpha_{i_{1'} j_1} \alpha_{i_{2'} j_2} \cdots \alpha_{i_{r'} j_r} e_{j_1} \times e_{j_2} \times \cdots \times e_{j_r} \\ &= \sum_j \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \alpha_{i_{1'} j_1} \alpha_{i_{2'} j_2} \cdots \alpha_{i_{r'} j_r} e_{j_1} \times e_{j_2} \times \cdots \times e_{j_r} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j} |\alpha_{i_1 j_{1'}} \alpha_{i_2 j_{2'}} \cdots \alpha_{i_r j_{r'}}| (e_{j_{1'}} \times e_{j_{2'}} \times \cdots \times e_{j_{r'}}),$$

这里 $|\alpha_{i_1 j_{1'}} \alpha_{i_2 j_{2'}} \cdots \alpha_{i_r j_{r'}}|$ 表示行列式

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 j_{1'}} & \alpha_{i_1 j_{2'}} & \cdots & \alpha_{i_1 j_{r'}} \\ \alpha_{i_2 j_{1'}} & \alpha_{i_2 j_{2'}} & \cdots & \alpha_{i_2 j_{r'}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i_r j_{1'}} & \alpha_{i_r j_{2'}} & \cdots & \alpha_{i_r j_{r'}} \end{vmatrix}.$$

如果任意两个 $j$ 相等，则这个行列式等于 0，而对于不相等的 $j$，

$$|\alpha_{i_1 j_{1'}} \alpha_{i_2 j_{2'}} \cdots \alpha_{i_r j_{r'}}| = \varepsilon_\sigma |\alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_r j_r}|,$$

这里 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$. 所以，(30) 可写为

$$[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}] A_0^r = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_r} |\alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_r j_r}| [e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_r}].$$

这指出：$C_r(\alpha)$ 是一个陣，它的元素是$(\alpha)$的 $r$-行子式 $|\alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_r j_r}|$.

如果 $r = n$，则斜称张量有基 $[e_1 e_2 \cdots e_n]$. 陣 $C_n(\alpha) = \det(\alpha)$. 此时(29)特殊化为行列式的乘法法則.

这些提示当作张量的对称类的丰富而稍复杂的理論的导引. 这方面的透辟論述見威尔 (Weyl) 著的古典羣 (Classical Groups) 第 3, 4 两章(也可参看威得朋 (Wedderburn) 著的陣論讲义 (Lectures on Matrices) 第 5 章).

### 習 題 60

1. 証明：$[x_1 x_2 \cdots x_n] = \sum \varepsilon_\sigma x_1' x_2' \cdots x_n' = |\xi_{11} \xi_{22} \cdots \xi_{nn}| [e_1 e_2 \cdots e_n]$，这里 $|\xi_{11} \xi_{22} \cdots \xi_{nn}|$ 是 $x_i$ 关于 $e_j$ 的坐标的行列式.

2. 証明：如果 $\alpha 1$ 是純量陣，则 $C_r(\alpha 1) = \alpha^r 1$.

3. 証明：$\det C_r(\alpha) = (\det(\alpha))^{\binom{n-1}{r-1}}$.

**8. 向量空間的域的扩张** 如果 $P$ 是一个域，它含有 $\Phi$ 为子域，则 $P$ 可看作 $\Phi$ 上向量空間. 可取域的加法为向量空間的加法，取域的积为 $\alpha \in \Phi$ 与 $\xi \in P$ 的純量乘法 $\alpha\xi$. 向量空間的各公理是 $P$ 的結合律与分配律及 $\Phi$ 含有 $P$ 的恆等元素的事实的直接推論. 向量空間可为无限維的或有限維的. 例如，如果 $P = \Phi(\lambda)$，这里 $\lambda$

是一个不定量，则$P$是$\Phi$上无限維的．另一方面，如果$P$是复数域，而$\Phi$是实数子域，则$P$是$\Phi$上二維向量空間．

今令$\mathfrak{R}$是$\Phi$上一个向量空間，并令$\mathfrak{P} = P \times \mathfrak{R}$是作为$\Phi$上向量空間的$P$与向量空間$\mathfrak{R}$的克伦内克积[1]．則$\mathfrak{P}$的元素的形状是$\sum \rho_i \times x_i$，这里$\rho_i \in P$，而$x_i \in \mathfrak{R}$．令$\sigma$是$P$的任意元素，因为$\xi \rightarrow \sigma\xi$是$\Phi$上$P$里一个綫性变换，所以映照

$$\sum \rho_i \times x_i \rightarrow \sum \sigma\rho_i \times x_i$$

是一个自同态．使用这个結果并命

$$\sigma(\sum \rho_i \times x_i) = \sum \sigma\rho_i \times x_i \tag{32}$$

来定义$\mathfrak{P}$里一个純量乘法，則我們曾証函数$\sigma z$是单值的，并且$\sigma(z_1 + z_2) = \sigma z_1 + \sigma z_2$．关于純量乘法的其它公理可直接驗証．所以，$\mathfrak{P}$可看作$P$上向量空間．我們把$\mathfrak{P}$記作$\mathfrak{R}_P$，并把由$\mathfrak{R}$得出的这个空間叫作**扩张基域**$\Phi$**为域**$P$**的空間**．

$P$上$\mathfrak{R}_P$的維数易知与$\Phi$上$\mathfrak{R}$的維数相同．这因为，令$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$是$\Phi$上$\mathfrak{R}$的一个基，并令$\bar{e}_i = 1 \times e_i$，則$\rho_i \times e_i = \rho_i(1 \times e_i) = \rho_i\bar{e}_i$，并且因为任意$z \in \mathfrak{R}_P$的形状为$\sum \rho_i \times e_i$，所以它也有$\sum \rho_i\bar{e}_i$的形状．同理，如果$\sum \rho_i\bar{e}_i = 0$，則$\sum \rho_i \times e_i = 0$，并且因为$e_i$是$\Phi$上綫性无关的，故每个$\rho_i = 0$．

对于每个$x \in \mathfrak{R}$，命$\bar{x} = 1 \times x$，則容易检查得对应$x \rightarrow \bar{x}$是$\Phi$上向量空間$\mathfrak{R}$与$\Phi$上$\mathfrak{R}_P$的一个子空間$\bar{\mathfrak{R}}$之間的一个等价．如果我們愿意的話，則可用$\mathfrak{R}_P$的子集合$\bar{\mathfrak{R}}$代替空間$\mathfrak{R}$．$\mathfrak{R}_P$与$\bar{\mathfrak{R}}$之間的关系可用下面的說法述出：

1. $\mathfrak{R}_P$里任意向量的形状为$\sum \rho_i\bar{x}_i$，这里$\rho_i \in P$，而$\bar{x}_i \in \bar{\mathfrak{R}}$．

2. 如果向量$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n) \in \bar{\mathfrak{R}}$，并且是$\Phi$上无关的，則它們也是$P$上无关的．

今設$A$是$\Phi$上$\mathfrak{R}$里一个綫性变换，則知映照$\sum \rho_i \times x_i \rightarrow \sum \rho_i \times x_i A$是$\mathfrak{R}_P$里一个自同态．我們还立知，它是$P$上$\mathfrak{R}_P$里一个綫性变换．这个映照叫做$A$在$\mathfrak{R}_P$里的**扩张**．我們用同样文字

1) 严格地說，克伦内克积的存在到目前只在$P$是$\Phi$上有限維的情形証明了．由第九章的論述，使我們能够把构造法扩张到无限維情形．

表示一个映照与它的扩张. 如果$(\alpha)$是$A$关于$\mathfrak{R}$的基$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$的陣,则

$$\bar{e}_i A = (1 \times e_i)A = 1 \times e_i A = \sum 1 \times \alpha_{ij} e_j$$
$$= \sum \alpha_{ij}(1 \times e_j) = \sum \alpha_{ij} \bar{e}_j.$$

所以,扩张的$A$关于基$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n)$的陣也是$(\alpha)$.

**9. 关于陣集合的相似性的一个定理** 本节将証关于陣集合的一个定理,这定理自身既有趣味,并且可以說明陣及代数理論中一个有用方法. 这个方法的观念是: 如果基域取"充分大"(例如,取代数閉域),有时会使結果的証明較为容易. 所以,我們可扩张基域以得出具有必要性質的域, 然后面对着問題指出最后結果在原有域上也成立.

我們要講述的特殊問題如次: 令$\omega_1$及$\omega_2$是元素属于$\Phi$的陣的两个集合. 設它們借元素属于扩张域$P$的一个陣而成相似,則我們是否可推得这两个集合可借元素属于$\Phi$的一个陣而成相似呢?

更确切地說,我們从$\Phi$上$\mathfrak{R}$里綫性变换的集合$\Omega$出发,而考虑$P$上$\mathfrak{R}$里綫性变换的扩张. 令$\omega$是这些扩张关于基$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n)$所决定的陣的集合,这里$\bar{e}_i = 1 \times e_i$. 我們已知,$\omega$里所有陣的元素属于域$\Phi$. 如果$(u_1, u_2, \cdots, u_n)$是$P$上$\mathfrak{R}_P$的任意基,而$u_i = \sum \mu_{ij} \bar{e}_j$,則$\Omega$关于这个基的陣集合是$(\mu)\omega(\mu)^{-1}$. 通常,其中有些陣的元素不属于$\Phi$. 但可能会有$(\mu) \notin \Phi_n$而集合$(\mu)\omega(\mu)^{-1} \subseteq \Phi_n$. 今将証明: 如果是这样的話, 則有$L(\Phi, n)$里一个陣$(\gamma)$存在,使对于每个$(\alpha) \in \omega$有

$$(\gamma)(\alpha)(\gamma)^{-1} = (\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}.$$

今将在$\Phi$含有无限多元素的假定下証明这个結果[1].

**定理 5.** 令$\Phi$是无限域, 并令$\omega$是元素属于$\Phi$的陣的一个集合. 設$(\mu)$是$L(P, n)$里一个陣使$(\mu)\omega(\mu)^{-1} \subseteq \Phi_n$, 这里$P$是$\Phi$

五
乙

1) 关于$\Phi$只含有限个元素情形的証明見杜宁 (Deuring) 的伽罗华理論及表示論 (Galoische Theorie und Darstellungstheorie), 載在数学紀事 (Math. Annalen), 卷 107, 第 140—144 頁.

的一个擴張，則存在有一个陣 $(\gamma)\in L(\Phi,n)$ 使对于每个 $(\alpha)\in\omega$ 有 $(\gamma)(\alpha)(\gamma)^{-1}=(\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}$.

証 用 $(\alpha)_\mu$ 表示 $(\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}$, 則

$$(\mu)(\alpha)=(\alpha)_\mu(\mu),$$

并且这些方程等价于 $(\mu)$ 的元素 $\mu_{ij}$ 的齐次綫性方程(可能无限个)組. 此外,这些方程的系数属于 $\Phi$,亦即它們的形状是

$$\sum\beta_{ij}\mu_{ij}=0\quad(\beta_{ij}\in\Phi).$$

先把 $\{(\beta)\}$ 看作 $\Phi_n$ 的一个子集合,并設 $r$ 是这个集合的秩,亦即 $r$ 是 $\{(\beta)\}$ 里(关于 $\Phi$)綫性无关陣的最大个数,则方程 $\sum\beta_{ij}\xi_{ij}=0$ 在 $\Phi$ 里对于 $\xi_{ij}$ 有 $n^2-r$ 个綫性无关解,而使每个解都是这些解的綫性組合. 令 $(\gamma_{ij}^{(1)})$, $(\gamma_{ij}^{(2)})$, $\cdots$, $(\gamma_{ij}^{(h)})$ 是这样解的集合,这里 $h=n^2-r$.

其次是指出: 如果元素属于 $\Phi$ 的陣的一个集合是 $\Phi$ 上綫性无关时,则也是 $P$ 上綫性无关. 这是显然的,因为空間 $P_n$ 是扩张空間 $\Phi_{nP}$. 所以,陣 $(\gamma_{ij}^{(1)})$, $\cdots$, $(\gamma_{ij}^{(h)})$ 是 $P$ 上綫性无关的. 我們知道, $r$ 也是集合 $\{(\beta)\}$ 关于 $P$ 的秩,并且方程 $\sum\beta_{ij}\xi_{ij}$ 在 $P$ 里的綫性无关解的最大个数也是 $n^2-r$. 所以,我們所选的特殊解 $(\gamma_{ij}^{(1)})$, $\cdots$, $(\gamma_{ij}^{(h)})$ 构成 $P$ 里解的基本集合. 特别是,

$$\mu_{ij}=\nu_1\gamma_{ij}^{(1)}+\nu_2\gamma_{ij}^{(2)}+\cdots+\nu_h\gamma_{ij}^{(h)},$$

这里 $\nu_k\in P$.

今以綫性无关的不定量 $\lambda_i$ 代替 $\nu_i$, 而考虑多項式

$$\det\left(\sum_k\lambda_k\gamma_{ij}^{(k)}\right).$$

因为这个多項式 $\in\Phi[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_h]$, 在 $\lambda_k=\mu_k$ 时它的値是 $\det(\mu)\neq 0$,所以它不是 0 多項式. 因为 $\Phi$ 是无限域,故可在 $\Phi$ 里选取値 $\lambda_k=\beta_k$ 使 $\det(\sum\beta_k\gamma_{ij}^{(k)})\neq 0$[1]. 令 $\gamma_{ij}=\sum\beta_k\gamma_{ij}^{(k)}$, 并且令 $(\gamma)=(\gamma_{ij})$, 则 $(\gamma)\in L(\Phi,n)$, 并且对于所有 $\beta$, $\sum\beta_{ij}\gamma_{ij}=0$. 所以,对于所有 $(\alpha)$,

---

1) 参看本书第一卷,第三章, §12 的定理 10.

$$(\gamma)(\alpha) = (\alpha)_\mu(\gamma),$$

而$(\gamma)$适合定理的要求。

## 習 題 61

1. 如果$\omega$是由单一陣所成的集合，而对于$\Phi$不加任何条件，証明定理5.

**10. 代数的另一定义. 代数的克伦内克积** 結合代数的概念已在第二章介紹过. 今将看到借克伦内克积的概念可給出代数的另一个簡单定义. 我們覚得去掉結合律把前面的討論推广是有好处的. 于是，前此的定义就改为下面形状：一个(无須可結合的)代数$\mathfrak{A}$是域$\Phi$上一个向量空間，在$\mathfrak{A}$里兼有一个二元乘法$xy$使

$$(33)\quad (x_1 + x_2)y = x_1y + x_2y, \quad x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2.$$

$$(34)\quad \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

条件(33)及(34)里最后的等式說明$\mathfrak{A}$是$\mathfrak{A}$与$\mathfrak{A}$关于乘法$xy$的一个积空間. 故知映照$\sum x \times y \to \sum xy$是克伦内克积$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$到$\mathfrak{A}$内的一个綫性变换.

这个提示用作代数的第二个定义的基础. 根据这个提示，我們定义一个代数是域$\Phi$上一个向量空間兼有$\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$到$\mathfrak{A}$内的一个綫性变换$P$. 在这样定义的代数里，可用公式

$$(35)\quad xy = (x \times y)P$$

引入一个二元积. 我們易知，(33)与(34)是成立的. 所以，这样步驟显然导致与前面定义相同的概念.

次設$\mathfrak{A}_1$及$\mathfrak{A}_2$同是域$\Phi$上的任意代数. 令$P_i$是$\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{A}_i$到$\mathfrak{A}_i$内的綫性映照，則$x_iy_i = (x_i \times y_i)P_i$. 今作克伦内克积$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$，并考虑这个空間与它自身的克伦内克积$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$. 我們知道，如果$x_1, y_1 \in \mathfrak{A}_1$而$x_2, y_2 \in \mathfrak{A}_2$，則映照

$$(36)\quad \sum x_1 \times x_2 \times y_1 \times y_2 \to \sum x_1 \times y_1 \times x_2 \times y_2$$

是$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$到$\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_2$的一个等价. 再則

$$(37)\quad \sum x_1 \times y_1 \times x_2 \times y_2 \to \sum (x_1 \times y_1)P_1 \times (x_2 \times y_2)P_2$$

是$\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_2$到$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$内一个綫性映照. 合併(36)

与(37)，得$\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$到$\mathfrak{A}$内的一个綫性映照$P$. 故$\mathfrak{A}$带着映照$P$組成域$\Phi$上一个代数. 如果$\sum x_1\times x_2$与$\sum y_1\times y_2$是$\mathfrak{A}$的两个元素，則$\mathfrak{A}$里它們的积是

$$(38)\qquad (\sum x_1\times x_2)(\sum y_1\times y_2)=\sum x_1y_1\times x_2y_2;$$

这因为，由定义得

$$(\sum x_1\times x_2\times y_1\times y_2)P=\sum(x_1\times y_1)P_1\times(x_2\times y_2)P_2$$
$$=\sum x_1y_1\times x_2y_2.$$

这样定义的代数叫做$\mathfrak{A}_1$与$\mathfrak{A}_2$的**克伦内克积**或**直接积**. (38)的一个直接推論是：如果$\mathfrak{A}_1$及$\mathfrak{A}_2$是結合代数，則克伦内克积$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2$是結合代数.

作为代数的克伦内克积的概念的說明，今述定理4的下面扩张.

**定理 6.** 代数$\mathfrak{L}(\mathfrak{R}\times\mathfrak{S},\mathfrak{R}\times\mathfrak{S})=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})\times\mathfrak{L}(\mathfrak{S},\mathfrak{S})$.

証 我們已知这个关系在向量空間意义下成立. 我們还有关系$(A\times B)(C\times D)=AC\times BD$，而这个关系指出，$\mathfrak{L}(\mathfrak{R}\times\mathfrak{S},\mathfrak{R}\times\mathfrak{S})$里通常的积与两个代数的克伦内克积里定义的合成重合.

与这个結果略为不同的形状是

**系** $\Phi_{mn}=\Phi_m\times\Phi_n$.

## 習 題 62

1. 令$a$是代数$\mathfrak{A}$的一个元素，并令$R_a$表示由$a$决定的映照$x\to xa$. 証明：$R_a$是$\mathfrak{A}$里一个綫性变换；还証明：映照$a\to R_a$是$\mathfrak{A}$到由$\mathfrak{A}$里所有綫性变换組成的空間$\mathfrak{L}$内的一个綫性变换.

2. 令$L_a$表示映照$x\to ax$. 証明：$L_a$是$\mathfrak{A}$里一个綫性变换，而$a\to L_a$是綫性映照.

3. 証明：$\mathfrak{A}$是結合的必須而且只須对于所有$a,b$有$L_aR_b=R_bL_a$；还証明：$\mathfrak{A}$是結合的必須而且只須$R_aR_b=R_{ab}(L_aL_b=L_{ba})$.

4. 令$\mathfrak{A}$是以$1,i,j,k$为基的实四維数代数，这里
$$i^2=j^2=k^2=-1,\quad ij=-ji=k,\quad jk=-kj=i,\quad ki=-ik=j.$$
証明：$\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\cong\Phi_4$.

# 第八章

# 綫性变换环

我們在本章里获得有限維向量空間的所有綫性变换的环 $\mathfrak{L}$ 的基本性質. 我們决定这个环的双側、左及右理想. 我們还指出:分别由向量空間 $\mathfrak{R}_1$ 与 $\mathfrak{R}_2$ 决定的两个环 $\mathfrak{L}_1$ 与 $\mathfrak{L}_2$ 不是同构的,除非它們所施为的空間是同构的. 在討論 $\mathfrak{L}$ 的自同构时,导致考虑一种重要的变换类型,叫做半綫性变换,它推广了綫性变换的概念.

**1. $\mathfrak{L}$ 的单純性** 我們将要看到研究可除环 $\Delta$ 上向量空間 $\mathfrak{R}$ 里所有綫性变换的环 $\mathfrak{L}$ 的方法有多种. 我們要考虑的第一种是把 $\mathfrak{L}$ 作为一个陣环. 我們引入由 $\mathfrak{R}$ 的一个特殊基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 决定的"陣单位" $E_{ij}$ 的集合. 定义 $E_{ij}$ 是能使

(1) $$e_r E_{ij} = \delta_{ir} e_j \quad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

的綫性映照. 由基向量的核对可驗証

(2) $$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il},$$

$$\sum E_{ii} = 1.$$

次引入与陣 diag $\{\alpha, \alpha, \cdots, \alpha\}$ 的集合对应的綫性变换的集合 $\Lambda$. 这些陣是由与 $\Delta$ 里每个 $\alpha$ 相伴的綫性映照 $\bar{\alpha}$ 得出, 这里 $\bar{\alpha}$ 使

(3) $$e_i\bar{\alpha} = \alpha e_i.$$

必須指出, $\bar{\alpha}$ 对于 $e_i$ 的作用虽然与純量乘法 $\alpha_l$ 相同, 但这些变换通常不是恆等的;这因为,如果 $x = \sum \xi_i e_i$, 則 $\alpha x = \sum(\alpha\xi_i)e_i$,而

$$x\bar{\alpha} = \sum(\xi_i e_i)\bar{\alpha} = \sum \xi_i(e_i\bar{\alpha}) = \sum(\xi_i\alpha)e_i.$$

所以 $\bar{\alpha} = \alpha_l$ 必須而且只須 $\alpha$ 属于 $\Delta$ 的心. 我們还注意到 $\bar{\alpha}$ 与基的选择及与 $\alpha$ 有关;由于我們大部分只附着一个基,所以与基的相关性无須表白.

綫性变换与陣之間的基本对应把陣 diag $\{\alpha, \alpha, \cdots, \alpha\}$ 与 $\bar{\alpha}$ 相伴．这些陣的全部是 $\Delta_n$ 的一个子环，与 $\Delta$ 同构．所以，$\bar{\Delta}$ 是 $\mathfrak{L}$ 的一个子环与 $\Delta$ 同构，而对应 $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ 是一个同构．

容易驗証，

$$\bar{\alpha}E_{ij} = E_{ij}\bar{\alpha}, \tag{4}$$

并且如果 $e_iA = \sum \alpha_{ij}e_j$，則

$$A = \sum \bar{\alpha}_{ij}E_{ij} = \sum E_{ij}\bar{\alpha}_{ij}. \tag{5}$$

故任意 $A \in \mathfrak{L}$ 可写成 $E_{ij}$ 的綫性組合，系数 $\in \bar{\Delta}$．对于表达式 $A = \sum \bar{\alpha}_{ij}E_{ij}$ 的系数还有重要公式

$$\bar{\alpha}_{ij} = \sum_k E_{ki}AE_{jk}. \tag{6}$$

这个公式使我們能够簡单地証明：$\mathfrak{L}$ 是一个**单純环**，亦即証明：$\mathfrak{L}$ 里双側理想仅有 0 及 $\mathfrak{L}$ 自身．今令 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{L}$ 里一个非零的双側理想，并令 $B = \sum \bar{\beta}_{ij}E_{ij}$ 是 $\mathfrak{B}$ 里非零元素，則每个 $\bar{\beta}_{ij} = \sum E_{ki}BE_{jk} \in \mathfrak{B}$．如果 $\bar{\beta}_{pq} \neq 0$，則 $1 = \bar{\beta}_{pq}\bar{\beta}_{pq}^{-1}$ 也属于 $\mathfrak{B}$，并且由此可推得 $\mathfrak{L}$ 里每个 $A$ 含于 $\mathfrak{B}$ 里．所以，$\mathfrak{B} = \mathfrak{L}$．

**定理 1.** 有限維向量空間里綫性變換環 $\mathfrak{L}$ 是單純環．

### 習　題　63

1. 証明：$\Delta$ 是与 $E_{ij}$ 可交换的綫性变换的全体．

**2. 算子方法**　今将用算子方法給 $\mathfrak{L}$ 的单純性以另一种証明．令 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{L}$ 里一个非零的双側理想．先証：如果 $[x]$ 是 $\mathfrak{R}$ 的任意一維子空間，則 $\mathfrak{B}$ 含有 $\mathfrak{R}$ 在 $[x]$ 上的射影 $E$．令 $B \neq 0$ 属于 $\mathfrak{B}$，并令 $\mathfrak{R}B = [y_1, y_2, \cdots, y_r]$，这里 $y_i$ 是綫性无关的．令 $x_1$ 是使 $x_1B = y_1$ 的一个向量．我們可找得一个綫性变换 $A_1$ 使 $y_1A_1 = x_1$ 而 $i>1$ 时 $y_iA_1 = 0$．于是，$x_1BA_1 = y_1A_1 = x_1$．所以，$E_1 \doteq BA_1$ 是 $\mathfrak{R}$ 在 $[x_1]$ 上的一个射影．今令 $C$ 及 $D$ 是綫性变换使 $xC = x_1$ 及 $x_1D = x$．于是，如果 $E = CE_1D$，則 $\mathfrak{R}E = \mathfrak{R}CE_1D = [x_1]D = [x]$ 而 $xE = xCE_1D = x_1E_1D = x_1D = x$．所以，$E$ 是 $\mathfrak{R}$ 在 $[x]$ 上的一个射影．因为 $E = CE_1D$，故 $E \in \mathfrak{B}$．

今令 $E$ 是 $\mathfrak{B}$ 里有极大秩的一个射影，则可断言 $E=1$. 否则，$\mathfrak{S}=\mathfrak{R}E\subset\mathfrak{R}$，并且有非零向量 $z$ 存在使 $zE=0$. 因为我們已知，$\mathfrak{B}$ 含有 $\mathfrak{R}$ 在 $[z]$ 上一个射影 $F$. 今令 $G=E+F-EF$. 如果 $x\in\mathfrak{S}$，则

$$xG=xE+xF-xEF=x+xF-xF=x.$$

再则，

$$zG=zE+zF-zEF=zF=z.$$

故 $G$ 在 $\mathfrak{S}+[z]$ 里有恆等映照的作用. 于是，$\mathfrak{R}G\supseteq\mathfrak{R}E+\mathfrak{R}F=\mathfrak{S}+[z]$. 所以，$G$ 是比 $E$ 有較大的秩的射影. 因为 $G\in\mathfrak{B}$，这与 $E$ 的选择矛盾. 故知 $E=1\in\mathfrak{B}$. 这显然意味着 $\mathfrak{B}=\mathfrak{L}$.

使用类似方法可証下面的定理.

**定理 2.** 如果 $\mathfrak{L}$ 是 $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}$ 里綫性變換的環，則反过來 $\Delta$ 是与 $\mathfrak{L}$ 里所有變換可交換的 $\mathfrak{R}$ 里自同態的整个集合.

証 令 $C$ 是与 $\mathfrak{L}$ 的每个元素可交换的 $\mathfrak{R}$ 里一个自同态. 如果 $x$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意向量，则 $x$ 与 $xC$ 是綫性相关的. 否则存在有一个 $A\in\mathfrak{L}$ 使 $xA=0$，但 $(xC)A\neq 0$. 这就与 $0=(xA)C=xCA$ 矛盾. 故对于每个 $x\neq 0$ 有 $xC=\gamma_x x$. 今令 $x$ 及 $y$ 是任意两个非零向量，则

$$xC=\gamma_x x,\quad yC=\gamma_y y.$$

另一方面有一个 $B\in\mathfrak{L}$ 存在使 $xB=y$. 于是，

$$yC=xBC=xCB=\gamma_x(xB)=\gamma_x y.$$

故 $\gamma_x=\gamma_y$. 这証明对于所有非零的 $x$ 有 $xC=\gamma x$. 因为这对于 $x=0$ 也成立，故 $C$ 是純量乘法 $\gamma_l$.

**3. $\mathfrak{L}$ 的左理想** 要決定 $\mathfrak{L}$ 的单側理想，我們将使用另一个技术，即把 $\mathfrak{L}$ 作为一个积羣来考慮. 令 $\mathfrak{R}'$ 是关于双綫性形式 $g(x,x')$ 与 $\mathfrak{R}$ 对偶的一个右向量空間. 如同前章定义 $x'\times y$ 为映照 $x\to g(x,x')y$，这里 $x'\in\mathfrak{R}'$ 而 $y\in\mathfrak{R}$；则知 $\mathfrak{L}$ 关于这个乘法是直接积 $\mathfrak{R}'\times\mathfrak{R}$.

今考慮两个映照 $x'\times y$ 及 $u'\times v$ 的积的表示法，则有下面的方程：

$$
\begin{aligned}
x[(x' \times y)(u' \times v)] &= g(x, x')y(u' \times v) \\
&= g(g(x, x')y, u')v \\
&= g(x, x')g(y, u')v \\
&= g(x, x'g(y, u'))u,
\end{aligned}
$$

这指出

$$(x' \times y)(u' \times v) = x'g(y, u') \times v = x' \times g(y, u')v.$$

更一般地，如果使用分配律，则知

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad (\sum x_i' \times y_i)(\sum u_j' \times v_j) &= \sum x_i' g(y_i, u_j') \times v_j \\
&= \sum x_i' \times g(y_i, u_j')v_j.
\end{aligned}
$$

这个基本乘法法则指出怎样在 $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{R}$ 里作单側理想. 令 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的任意子空間，并命 $\mathfrak{J}' = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ 是形状如 $\sum u_j' \times v_j$ 的綫性变换的全体，这里 $u_j' \in \mathfrak{R}'$ 而 $v_j \in \mathfrak{S}$. 显然 $\mathfrak{J}'$ 在加法与減法下是閉的. 由(7)还知，$\mathfrak{J}'$ 在由 $\mathfrak{L}$ 的任意元素所作的左乘法下封閉. 故 $\mathfrak{J}'$ 是一个左理想. 仿此可見，如果 $\mathfrak{S}'$ 是 $\mathfrak{R}'$ 的一个子空間，則映照 $\sum x_i' \times y_i$ 的全体 $\mathfrak{J} = \mathfrak{S}' \times \mathfrak{R}$ 是 $\mathfrak{L}$ 里一个右理想，这里 $x_i' \in \mathfrak{S}'$ 而 $y_i \in \mathfrak{R}$.

我們要証的主要結果是：理想 $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ 与 $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{R}$ 是 $\mathfrak{L}$ 里仅有的单側理想. 先考虑左理想. 令 $\mathfrak{J}'$ 是 $\mathfrak{L}$ 里任意非零左理想，并令 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{J}'$ 里 $B$ 的所有秩子空間 $\mathfrak{R}B$ 的联合. 如果 $B \neq 0$，則可写 $B = \sum_1^r u_j' \times v_j$，这里 $r$ 是 $B$ 的秩. 于是，易知集合 $(v_1, v_2, \cdots, v_r)$ 是 $\mathfrak{R}B$ 的一个基，而 $(u_1', u_2', \cdots, u_r')$ 是 $\mathfrak{R}'B'$ 的一个基，这里 $B'$ 是 $B$ 的折轉[1]. 因为 $v_j \in \mathfrak{R}B \subseteq \mathfrak{S}$，所以 $B \in \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$. 于是，$\mathfrak{J}' \subseteq \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$. 次令 $y_1, y_2, \cdots, y_r$ 是使 $g(y_i, u_j') = \delta_{ij}$ 的向量，并令 $x_1', x_2', \cdots, x_r'$ 是 $\mathfrak{R}'$ 里任意向量. 命 $A = \sum x_i' \times y_i$，則由 (7) 得

$$(8)\qquad AB = \sum x_i' g(y_i, u_j') \times v_j = \sum x_i' \times v_i,$$

而这个綫性变换属于 $\mathfrak{J}'$. 这証明：如果 $v = \sum \beta_i v_i$ 是 $\mathfrak{R}B$ 里任意

1) 参看第五章的 §5.

向量，而 $x'$ 是 $\mathfrak{R}'$ 里任意向量，则映照 $x' \times v = \sum x'\beta_i \times v_i \in \mathfrak{J}'$. 我們还得：如果 $B_1, B_2, \cdots$ 是 $\mathfrak{J}'$ 里任意綫性变换，而 $v^{(k)}$ 是 $\mathfrak{R}B_k$ 里任意向量，則 $\sum x'_k \times v^{(k)} \in \mathfrak{J}'$. 故 $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{J}'$，而这証明了下面的定理.

**定理 3.** $\mathfrak{L}$ 里每个左理想 $\mathfrak{J}'$ 的形狀为 $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$，这里 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子空間. 子空間 $\mathfrak{S}$ 事实上是所有秩空間 $\mathfrak{R}B$ 的併集，这里 $B \in \mathfrak{J}'$.

这个結果也可用另一种方式列出. 命 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的任意子空間. 定义 $\mathfrak{J}'(\mathfrak{S})$ 是 $\mathfrak{L}$ 里使 $\mathfrak{R}B \subseteq \mathfrak{S}$ 的 $B$ 的全体；显然 $\mathfrak{J}'(\mathfrak{S})$ 是 $\mathfrak{L}$ 里一个左理想. 另一方面，命 $\mathfrak{J}'$ 是 $\mathfrak{L}$ 里任意左理想，并且如前命 $\mathfrak{S}$ 是所有子空間 $\mathfrak{R}B$ 的併集，这里 $B \in \mathfrak{J}'$. 显然 $\mathfrak{J}' \subseteq \mathfrak{J}'(\mathfrak{S})$，并且定理 3 指出 $\mathfrak{J}' = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$. 今命 $B \in \mathfrak{J}'(\mathfrak{S})$，則 $\mathfrak{R}B \subseteq \mathfrak{S}$，并且如果 $\mathfrak{R}B = [v_1, v_2, \cdots, v_r]$，这里 $v_i$ 是綫性无关的，則 $B = \sum u'_j \times v_j$. 于是，$v_i \in \mathfrak{S}$，而 $B \in \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S} = \mathfrak{J}'$. 故 $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}'(\mathfrak{S})$. 于是定理 3 有下面的另一个形狀.

**定理 4.** $\mathfrak{L}$ 里每个左理想 $\mathfrak{J}'$ 的形狀为 $\mathfrak{J}'(\mathfrak{S})$，这里 $\mathfrak{J}'(\mathfrak{S})$ 是把 $\mathfrak{R}$ 映到一个子空間 $\mathfrak{S}$ 內的綫性變換的全体. 空間 $\mathfrak{S}$ 是屬于 $\mathfrak{J}'$ 的映照的秩空間的併集.

定理 3（或 4）在 $\mathfrak{R}$ 的子空間的集合与 $\mathfrak{L}$ 的左理想的集合之間建立一个 1—1 对应 $\mathfrak{S} \to \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}(\mathfrak{J}'(\mathfrak{S}))$. 这个对应显然保持次序：如果 $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_2$，則 $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}_2$. 故得 $\mathfrak{R}$ 的子空間格到 $\mathfrak{L}$ 的左理想格的一个格同构.

## 習 題 64

1. 如果 $\mathfrak{J}'$ 是一个非零左（右，双側）理想，而不能存在有左（右，双側）理想 $\mathfrak{J}''$ 使 $\mathfrak{J}' \supset \mathfrak{J}'' \supset 0$，則 $\mathfrak{J}'$ 叫做**极小左（右，双側）理想**. 証明：$\mathfrak{L}$ 拥有极小左理想，并找它們的形狀.

2. 如果 $\mathfrak{J}'$ 是一个左（右，双側）理想，$\neq \mathfrak{L}$，并且不能存在有左（右，双側）理想 $\mathfrak{J}''$ 使 $\mathfrak{J}' \subset \mathfrak{J}'' \subset \mathfrak{L}$，則 $\mathfrak{J}'$ 叫做**极大左（右，双側）理想**. 証明：$\mathfrak{L}$ 拥有极大左理想，并找它們的形狀.

3. 証明：如果 $\mathfrak{J}'$ 是陣环 $\Delta_n$ 里一个左理想，这里 $\Delta$ 是一个可除环，則 $L(\Delta, n)$ 里有一个陣 $(\mu)$ 存在使 $(\mu)\mathfrak{J}'(\mu)^{-1}$ 是形狀如

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2r} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nr} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

的陣的集合，这里 $\alpha_{ij}$ 是任意的。

4. 証明：$\mathfrak{L}$ 的每个左理想是由同势元素 $E$ 生成的一个主理想 $\mathfrak{L}E$.

**4. 右理想** 如果 $\mathfrak{I}$ 是 $\mathfrak{L}$ 里一个右理想，則折轉 $B'$ 的集合 $\mathfrak{I}'$ 是对偶空間 $\mathfrak{R}'$ 里綫性变換环 $\mathfrak{L}'$ 的一个左理想，这里 $B\in\mathfrak{I}$. 还有 $\mathfrak{I}$ 是 $\mathfrak{I}'$ 里映照的折轉的集合. 所以我們可由 $\mathfrak{I}'$ 的形状演繹出 $\mathfrak{I}$ 的形状. 如果把定理 3 应用到 $\mathfrak{I}'$，則知 $\mathfrak{I}'=\mathfrak{S}'\times'\mathfrak{R}$，它是映照 $\sum x_i'\times' y_i$ 的全体，这里 $x_i'\in\mathfrak{S}'$ 而 $y_i\in\mathfrak{R}$，并且 $\sum x_i'\times' y_i$ 表示映照

$$x'\to\sum x_i'g(y_i, x'). \tag{9}$$

所以 $\mathfrak{I}$ 是 $\mathfrak{L}$ 里映照

$$x\to\sum g(x, x_i')y_i \tag{10}$$

的全体，故 $\mathfrak{I}=\mathfrak{S}'\times\mathfrak{R}$. 于是得下面的定理.

**定理 5.** $\mathfrak{L}$ 里每个右理想 $\mathfrak{I}$ 的形状为 $\mathfrak{S}'\times\mathfrak{R}$，这里 $\mathfrak{S}'$ 是 $\mathfrak{R}'$ 的一个子空間.

在 $\mathfrak{R}$ 的子空間与 $\mathfrak{L}$ 的右理想之間还可得一个对应. 要达到这个目的，考虑 $\mathfrak{R}$ 里向量 $y$ 的子空間 $\mathfrak{S}=j(\mathfrak{S}')$ 使对于 $\mathfrak{S}'$ 里所有 $y'$，$g(y, y')=0$. 如果 $y\in\mathfrak{S}$ 而 $B\in\mathfrak{I}$，則由 (10) 得 $yB=0$. 如果 $z$ 是任意向量对于 $\mathfrak{I}$ 里所有 $B$ 也使 $zB=0$，則对于所有 $x_i'\in\mathfrak{S}$ 及所有 $y_i\in\mathfrak{R}$，$\sum g(z, x_i')y_i=0$. 如果选 $y_i$ 是綫性无关的，則由此可推得 $g(z, x_i')=0$. 故 $z\in\mathfrak{S}$. 于是 $\mathfrak{S}$ 的特点可說是被 $\mathfrak{I}$ 里每个 $B$ 所零化的向量的全体. 次設 $C$ 是对于所有 $y\in\mathfrak{S}$ 能使 $yC=0$ 的任意綫性变換；写下 $C=\sum x_i'\times y_i$，这里 $y_i$ 是綫性无关的. 則 $0=yC=\sum g(y, x_i')y_i$，因此对于所有 $y\in\mathfrak{S}$，$g(y, x_i')=0$. 所以，$x_i'\in j(\mathfrak{S})=j(j(\mathfrak{S}'))=\mathfrak{S}'$，而 $C\in\mathfrak{I}$. 故还看出 $\mathfrak{I}$ 是把 $\mathfrak{S}$ 里每个向量零化的綫性变換的全体，記作 $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S})$. 这証明了以下定理.

**定理 6.** $\mathfrak{L}$ 里每个右理想 $\mathfrak{I}$ 的形状为 $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S})$，这是零化一个子空間 $\mathfrak{S}$ 的綫性變換的集合. 子空間 $\mathfrak{S}$ 是被每个 $B\in\mathfrak{I}$ 所零化的向

量的全体.

因为 $\mathfrak{S}'$ 是 $\mathfrak{R}'$ 里任意子空間，故 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意子空間. 如果 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的任意子空間，在开始时显見零化 $\mathfrak{S}$ 的綫性变换的全体 $\mathfrak{I}=\mathfrak{Z}(\mathfrak{S})$ 是 $\mathfrak{L}$ 里一个右理想. 上面論証指出：被 $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S})$ 里每个映照所零化的向量只是 $\mathfrak{S}$ 里的向量. 我們还曾証得：每个右理想的形状为 $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S})$. 故 $\mathfrak{S}\to\mathfrak{Z}(\mathfrak{S})$ 是 $\mathfrak{R}$ 的子空間的集合与 $\mathfrak{L}$ 里右理想的集合之間的 1—1 对应. 显然这个对应是逆序的，亦卽：如果 $\mathfrak{S}_1\supseteq\mathfrak{S}_2$，則 $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S}_1)\subseteq\mathfrak{Z}(\mathfrak{S}_2)$.

### 習 題 65

1. 說出并且証明习题 64 里各题关于右理想的类似結果.
2. 証明：如果 $\mathfrak{I}'$ 是一个非零左理想，則被 $\mathfrak{I}'$ 里所有綫性变换零化的向量只是 $x=0$.
3. 使用定理 6 及前题証明 $\mathfrak{L}$ 是单純的.

**5. 綫性变换环的同构** 命 $\mathfrak{I}$ 是 $\mathfrak{L}$ 里一个非零右理想，則有一个向量 $x$ 存在使象 $xB$ 的集合 $x\mathfrak{I}$ 不是 0，这里 $B\in\mathfrak{I}$. 如果 $B_1$ 及 $B_2$ 属于 $\mathfrak{I}$，則

$$x(B_1+B_2)=xB_1+xB_2. \tag{11}$$

所以，映照 $B\to xB$ 是 $\mathfrak{I}$ 的加法羣到 $\mathfrak{R}$ 内的一个同态. 故在这个同态下象 $x\mathfrak{I}$ 是羣 $\mathfrak{R}$ 的一个子羣. 今将証 $x\mathfrak{I}$ 事实上是整个 $\mathfrak{R}$. 首先要講 $x\mathfrak{I}$ 由每个 $A\in\mathfrak{L}$ 映到它自身；这因为，如果 $y\in x\mathfrak{I}$，則对于某些 $B\in\mathfrak{I}$ 有 $y=xB$，而 $yA=xBA=xB'$，这里 $B'=BA\in\mathfrak{I}$. 所以，$yA\in x\mathfrak{I}$.

次要講 $x\mathfrak{I}$ 在純量乘法下是閉的. 如果 $\alpha\in\Delta$，則 $\mathfrak{L}$ 里有一个 $A$ 存在使 $yA=\alpha y$. 于是，$\alpha y=yA$ 属于 $x\mathfrak{I}$. 故知 $x\mathfrak{I}$ 是一个非零子空間，在 $\mathfrak{L}$ 下不变. 我們已知[1]，这种子空間只有 $\mathfrak{R}$ 自身，故得下面的引理.

**引理 1.** 如果 $\mathfrak{I}$ 是一个非零右理想，而 $x$ 是使 $x\mathfrak{I}\neq 0$ 的一个向量，則 $x\mathfrak{I}=\mathfrak{R}$.

---

1) 参看第四章，§1.

其次，我們看出，映照 $B\rightarrow xB$ 不只是羣同态，亦即它是一个算子或模同态；这只是意味着

(12) $$BA\rightarrow(xB)A,$$

因为 $(xB)A=x(BA)$. 所以这是显然的. 于是，如果以 $\chi$ 表示这个映照，則(12)說明

(13) $$(BA)\chi=(B\chi)A,$$

这个方程对于所有 $B\in\mathfrak{J}$ 及所有 $A\in\mathfrak{L}$ 成立.

方程(13)指出：同态 $\chi$ 的核不只是 $\mathfrak{J}$ 的加法羣的一个子羣，而是环 $\mathfrak{L}$ 的一个右理想；这因为，如果 $B\chi=0$，則 $(BA)\chi=(B\chi)A=0A=0$. 所以，如果 $\mathfrak{J}$ 是一个极小右理想，則 $\chi$ 的核是 0；这就是說：$\chi$ 是一个同构.

**引理 2.** 如果 $\mathfrak{J}$ 是一个極小右理想，而 $x\mathfrak{J}\neq 0$，則同態 $\chi$: $B\rightarrow xB$ 是 $\mathfrak{J}$ 到 $x\mathfrak{J}=\mathfrak{R}$ 上的一个同構.

如果 $\chi^{-1}$ 表示 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{J}$ 上的逆映照，而 $A_r$ 表示 $\mathfrak{J}$ 里右乘法 $B\rightarrow BA$，則由(13)得 $A_r\chi=\chi A$，故

(13′) $$A_r=\chi A\chi^{-1}.$$

向量空間与 $\mathfrak{L}$ 的任意极小右理想之間的这个关系給出即将介紹的綫性变换环上若干可注意結果的基本理由. 第一个結果是下面的定理.

**定理 7.** 令 $\mathfrak{R}_i\,(i=1, 2)$ 是可除環 $\Delta_i$ 上一个向量空間，并令 $\mathfrak{L}_i$ 是 $\Delta_i$ 上 $\mathfrak{R}_i$ 里綫性變換的環；如果 $\mathfrak{L}_1$ 同構于 $\mathfrak{L}_2$，則 $\Delta_1$ 同構于 $\Delta_2$ 而兩个空間有相同維數.

証 令 $\phi$ 是 $\mathfrak{L}_1$ 到 $\mathfrak{L}_2$ 上的一个同构，并令 $\mathfrak{J}_1$ 是 $\mathfrak{L}_1$ 里一个极小右理想，則象 $\mathfrak{J}_2=\mathfrak{J}_1\phi$ 是 $\mathfrak{L}_2$ 里一个极小右理想. 令 $\chi_i$ 是上面定义的 $\mathfrak{J}_i$ 到 $\mathfrak{R}_i$ 上的一个同构；如果 $A_i\in\mathfrak{L}_i$，則

(14) $$A_{1r}=\chi_1A_1\chi_1^{-1},\quad A_{2r}=\chi_2A_2\chi_2^{-1}.$$

如果 $B_1\in\mathfrak{J}_1$，則还有$(B_1A_1)\phi=(B_1\phi)(A_1\phi)$. 所以 $A_{1r}\phi=\phi(A_1\phi)_r$，这里 $A_1\phi$ 表示 $A_1$ 在 $\phi$ 下的象(在这个証明中都使用这样表示，不再說明). 于是，

(15) $$(A_1\phi)_r=\phi^{-1}A_{1r}\phi.$$

合併(14)与(15)得

$$A_1\phi = \chi_2^{-1}(A_1\phi)_r\chi_2 = \chi_2^{-1}\phi^{-1}A_{1r}\phi\chi_2$$
$$= (\chi_2^{-1}\phi^{-1}\chi_1)A_1(\chi_1^{-1}\phi\chi_2).$$

因为 $\chi_1^{-1}$ 是 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{I}_1$ 上的一个同构. $\phi$ 是 $\mathfrak{I}_1$ 到 $\mathfrak{I}_2$ 上的一个同构,而 $\chi_2$ 是 $\mathfrak{I}_2$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 上的一个同构,所以映照 $U = \chi_1^{-1}\phi\chi_2$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 上的一个同构. 我們又已証了

$$A_1\phi = U^{-1}A_1U. \tag{16}$$

今令 $\alpha_{1l}$ 表示 $\mathfrak{R}_1$ 上一个純量乘法. 因为 $\alpha_{1l}$ 与每个 $A_1\in\mathfrak{L}_1$ 可交换,故 $U^{-1}\alpha_{1l}U$ 与每个 $A_1\phi$ 可交換;从而与每个 $A_2\in\mathfrak{L}_2$ 可交換. 由定理 2 知,这可推得 $U^{-1}\alpha_{1l}U$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 里一个純量乘法. 同理,如果 $\alpha_{2l}$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 里任意純量乘法,则 $\alpha_{1l} = U\alpha_{2l}U^{-1}$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 里一个純量乘法. 显然 $U^{-1}\alpha_{1l}U = \alpha_{2l}$. 于是,映照 $\alpha_{1l}\to U^{-1}\alpha_{1l}U$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 里純量乘法的环 $\Delta_{1l}$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 里純量乘法的环 $\Delta_{2l}$ 上的一个同构. 今令 $\alpha_1^u$ 表示 $\Delta_2$ 里使

$$(\alpha_1^u)_l = U^{-1}\alpha_{1l}U$$

的元素,则这样决定的映照 $u$ 是 $\Delta_1$ 到 $\Delta_2$ 上的同构. 对于 $\mathfrak{R}_1$ 里任意的 $x_1$ 及 $\Delta_1$ 里任意的 $\alpha_1$,我們有

$$(\alpha_1x_1)U = (x_1\alpha_{1l})U = (x_1U)(U^{-1}\alpha_{1l}U) = (x_1U)(\alpha_1^u)_l,$$

或

$$(\alpha_1x_1)U = \alpha_1^u(x_1U). \tag{17}$$

这个方程指出: $\mathfrak{R}_1$ 与 $\mathfrak{R}_2$ 有相同的維数. 令 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}_1$ 的一个基,则任意的 $x = \sum\xi_ie_i$,这里 $\xi_i\in\Delta_1$. 于是,由(17)得 $xU = \sum(\xi_ie_i)U = \sum\xi_i^u(e_iU)$,而向量 $e_iU$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 的生成元素.如果在 $e_iU$ 之間还有一个关系,则可把它写成 $\sum\xi_i^u(e_iU)=0$ 的形状;于是,$(\sum\xi_ie_i)U = 0$,而 $\xi_i$ 与 $\xi_i^u$ 都是 0. 这就完成了証明.

实际上我們曾証出比要講的更多的結果. 为着述出精确的結果,我們将使用綫性变换概念的一个重要推广,今定义它如次: 令 $U$ 是 $\Delta_1$ 上向量空間 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\Delta_2$ 上向量空間 $\mathfrak{R}_2$ 的一个映照,如果 1) $U$ 是加法羣的一个同态,及 2)有 $\Delta_1$ 到 $\Delta_2$ 上的一个同构 $u$ 存在使

对于所有 $x \in \mathfrak{R}_1$ 及所有 $\alpha \in \Delta_1$,

$$(\alpha x)U = \alpha^u(xU),$$

则映照 $U$ 叫做半綫性变换. 如果 $u'$ 是另一个同构使上面的方程成立,则对于所有 $x$, $(\alpha^u - \alpha^{u'})(xU) = 0$. 所以,如果 $U \neq 0$, 则 $\alpha^u = \alpha^{u'}$, 并且 $u = u'$. 所以,如果 $U \neq 0$, 则 $u$ 可由 $U$ 唯一决定;而在此种情形, $u$ 就叫做 $U$ 的相伴同构.

令 $U_1$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内的一个半綫性变换,而 $U_2$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 到第三个向量空間 $\mathfrak{R}_3$ 内的一个半綫性变换. 令 $u_1$ 与 $u_2$ 分别是 $U_1$ 与 $U_2$ 的同构,则

$$(\alpha x)U_1U_2 = (\alpha^{u_1}(xU_1))U_2 = \alpha^{u_1u_2}(xU_1U_2).$$

于是, $U_1U_2$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_3$ 内的一个半綫性变换, 带有相伴同构 $u_1u_2$. 次設 $U_1$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 上的 1—1 半綫性变换, 并令 $U_1^{-1}$ 表示它的逆变换,則由 $(\alpha x)U_1 = \alpha^{u_1}(xU_1)$, 得 $\alpha x = (\alpha^{u_1}(xU_1))U_1^{-1}$. 以 $x$ 代 $xU_1$, 以 $\alpha$ 代 $\alpha^{u_1}$, 則这个方程变为 $(\alpha x)U_1^{-1} = \alpha^{u_1^{-1}}(xU_1^{-1})$. 所以, $U_1^{-1}$ 是带有同构 $u_1^{-1}$ 的半綫性变换.

这些提示指出, 如果 $A_1 \in \mathfrak{L}_1$, 而 $U$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 上的一个 1—1 半綫性变换, 則 $U^{-1}A_1U \in \mathfrak{L}_2$. 显然, $A_1 \to U^{-1}A_1U$ 是 $\mathfrak{L}_1$ 到 $\mathfrak{L}_2$ 上的一个同构. 这結果自然是較平凡的,但能确定逆定理的成立,而这就是方程(16)与(17)指出的事实.

**定理 8.** $\mathfrak{L}_1$ 到 $\mathfrak{L}_2$ 上的任意同構 $A_1 \to A_1\phi$ 是由 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 上的一个 1—1 半綫性變換 $U$ 給出,亦即 $A_1\phi = U^{-1}A_1U$.

由此得下面的系.

**系** $\mathfrak{L}$ 的任意自同構是由 $\mathfrak{R}$ 到它自身上的一个 1—1 半綫性變換給出.

## 習 題 66

1. 令 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基,并令 $U$ 是 $\mathfrak{R}$ 到它自身內的一个半綫性变换. 如果 $e_iU = \Sigma\alpha_{ij}e_j$, 則 $(\alpha)$ 是 $U$(关于給定的基)的陣. 証明: $U$ 是由 $(\alpha)$ 及相伴自同构完全决定. 求給出 $U$ 关于第二个基的陣的变换公式. 証明:如果 $(\alpha)$ 是一个陣,而 $u$ 是一个自同构,則对于任意对 $((\alpha), u)$ 有一个半綫性变换与它对应,这个变换关于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的陣是 $(\alpha)$,而它的自同构是 $u$.

2. 如果 $U$ 是半綫性变换带有陣 $(\alpha)$ 及自同构 $u$, 写下 $U \to ((\alpha), u)$. 証明:如果 $U \to ((\alpha), u)$ 及 $V \to ((\beta), v)$, 則 $UV \to ((\alpha)^v(\beta), uv)$, 这里 $(\alpha)^v = (\alpha_{ij}^v)$.

3. 証明：一个子空間 $\mathfrak{S}$ 在一个半綫性变换 $U$ 下的象 $\mathfrak{S}U$ 是一个子空間. 証明：由变换 $U$ 映到 0 的向量的集合 $\mathfrak{Z}$ 是一个子空間. 証明：維数关系 $\dim \mathfrak{R}U+\dim \mathfrak{Z}=n$.

4. 証明：純量乘法是半綫性变换.

5. 令 $\mathfrak{L}$ 是域 $\Phi$ 上向量空間里綫性变换的环. 証明：$\mathfrak{L}$ 里使心的元素不变的每个自同构是內自同构，亦即具有形状 $A\rightarrow U^{-1}AU$，这里 $U\in\mathfrak{L}$。

# 第 九 章

# 无限維向量空間

到此为止我們专集中注意力于闡述有限維向量空間. 虽然有限情形的基本概念确是可用于任意空間，而对于沒有有限基的空間所有这些概念是否都是有效則不是显然的.

本章介紹任意向量空間的研究. 这种空間的討論构成較新的研究領域，它的发展在很大程度上是受分析上需要的影响. 最主要的应用在使用代数上概念外也使用拓扑上概念. 这些应用的出发点是拓扑向量空間的概念. 另一方面，我們曾找到关于任意（离散）向量空間的若干有趣結果，而这些就是这里要討論的. 拓扑上概念在討論开始时沒有出現，但在考察綫性变换的集合上某些自然拓扑时将要遇到. 我們将用这些概念給純粹代数的結果以簡单的講述.

我們要給出的許多結果都是有限情形上結果的直接推广，但有一些本质上差別. 最重要的差別是一个向量空間的共軛空間的共軛空間不与原来空間重合. 事实上，如果 $\mathfrak{R}$ 是无限維向量空間，則 $\dim \mathfrak{R}^* > \dim \mathfrak{R}$，而这就阻碍了方程 $\mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{R}$ 的成立.

本章末了部分又提到綫性变换的集合的研究. 我們将見到叔尔的基本引理使自同态的不可約集合的理論能化簡为綫性变换的不可約集合的理論. 这个引理之外，我們还証明关于綫性变换的不可約集合的一个稠密性定理，它是勃恩賽得(Burnside)的一个古典定理的推广.

目前的考察比起有限情形自然需要更多有力的邏輯工具，其中特別要提到佐恩(Zorn)引理及基数理論. 我們假定讀者对于这些概念及拓扑的綱要都已熟悉.

**1. 基的存在** 令 $\mathfrak{R}$ 是可除环 $\Delta$ 上一个任意向量空間. 我們知道，如果 $\mathfrak{R}$ 里每个向量都是 $\mathfrak{R}$ 的一个子集合 $S$ 里向量的(有限)綫性組合，則 $S$ 叫做 $\mathfrak{R}$ 的生成元素集合. 如果 $S$ 的每个有限子集合 $F$ 是綫性无关的，則 $S$ 是綫性无关集合. 一个綫性无关的子集合 $B$ 也是生成元素集合时，則 $B$ 是一个基，此时每个向量有一个方法而且仅有一个方法写为 $B$ 里元素的綫性組合.

今将証明下面两个基本結果：1)任意生成元素集合含有 $\mathfrak{R}$ 的一个基，及 2) 元素的任意綫性无关集合可从任意基里补充一些元素而得一个基. 这两个結果都要用到下面的佐恩引理:

令 $P$ 是一个偏序集合，它的每个綫性有序子集合有一个上界，則 $P$ 拥有一个極大元素[1].

偏序集合的概念在第一章里曾定义过，它是一个集合，在这个集合里定义有一个二元关系 $a \leqslant b$ 使: (i) $a \leqslant a$; (ii) 如果 $a \leqslant b$ 而 $b \leqslant a$, 則 $a = b$; (iii) 如果 $a \leqslant b$, 而 $b \leqslant c$, 則 $a \leqslant c$. 綫性有序集合(或鏈)是一个偏序集合，在这个集合里任意两个元素都可比較的，亦即或是 $a \leqslant b$, 或是 $b \leqslant a$. 一个偏序集合的子集合 $S$ 的上界是一个元素 $u \in P$ 能使 $S$ 里每个 $s$ 有 $s \leqslant u$. 如果 $m$ 是子集合 $S$ 的一个元素，而 $S$ 里沒有元素 $s(\neq m)$ 能使 $m \leqslant s$, 則 $m$ 叫做 $S$ 的极大元素.

今来証明上面的命題 1). 令 $S$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个生成元素集合. 令 $P$ 是 $S$ 的綫性无关子集合的集合. 則 $P$ 关于包含关系是一个偏序集合. 令 $L$ 是 $P$ 的一个綫性有序子集合，并且令 $U$ 是属于 $L$ 的集合的邏輯和，則可断言 $U$ 是綫性无关的. 否則 $U$ 含有一个綫性相关集合 $u_1, u_2, \cdots, u_m$. 因为，$u_i \in A_i \in L$; 而对于任意 $i, j$ 有 $A_i \subseteq A_j$ 或 $A_j \subseteq A_i$. 所以有一个 $A$，譬如是 $A_m$, 含所有其它的 $A_i$. 于是，每个 $u_i \in A_m$, 而 $A_m$ 含有一个有限的綫性相关子集合. 这与假設 $A_m \in P$ 矛盾；所以，$U \in P$. 显然这个元素可用为所有 $A \in L$

---

1) 这个极大原理似是由霍斯多夫 (Hausdorff) 首先发現. 它在代数上的重要是由佐恩首先肯定. 这个原理的充分討論見柏克霍夫 (Birkhoff) 著的格論 (Lattice Theory)(第 2 版), 第 42 頁.

的一个上界. 至此可使用佐恩引理以推出 $P$ 含有一个极大元素, 而这就意味着生成元素集合 $S$ 含有一个极大綫性无关子集合 $B$. 我們易知 $B$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基. 如果 $y$ 是 $S$ 的任意元素不含于 $B$ 里, 則集合 $B\cup y$ 是一个相关集合. 这可推得 $y$ 是 $B$ 的元素的綫性組合[1]. 所以, 每个 $s\in S$ 是 $B$ 的元素的綫性組合. 故 $B$ 是一个生成元素集合; 并且因为 $B$ 是綫性无关集合, 故实际上 $B$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基.

2) 的証明与上面类似. 此时令 $S$ 是綫性无关集合, 并令 $B$ 是一个基. 令 $P$ 是含有 $S$ 而含于 $S\cup B$ 里的綫性无关集合的集合. 則重复上面的論証指出: $P$ 含有一个极大元素 $C$. 故易知 $C$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基.

**2. 維数的不变性** 其次要証 $\mathfrak{R}$ 的任意两个基的基数相等.

令 $B$ 与 $C$ 是 $\mathfrak{R}$ 的两个基. 我們把 $B$ 的元素用下标 $i$ 注出, 这里 $i$ 属于一个集合 $I$; 又把 $C$ 的元素用下标 $k$ 注出, 这里 $k$ 属于一个集合 $K$. 如果这两个基中有一个譬如 $B$(或 $I$)是有限的, 則 $\mathfrak{R}$ 有一个有限基. 于是知 $C$ 也是有限的, 而且它的基数与 $B$ 的基数相同[2]. 故只要考虑 $B$ 与 $C$ 都是无限情形就够了. 这里可使用下面的洛尉(Löwig)的論証. 用 $C$ 的 $f_k$ 把 $B$ 的每个 $e_i$ 写出如

$$e_i=\beta_1 f_{k_1}+\beta_2 f_{k_2}+\cdots+\beta_m f_{k_m},$$

这里 $\beta_j\neq 0$. 每个 $f_k$ 必定出現于某个这样的式子里; 这因为, 如果有一个特殊的 $f_k$ 不出現, 則由于这个 $f_k$ 是 $e$ 的一个綫性組合, 而每个 $e$ 是 $f(\neq f_k)$ 的綫性組合, 所以 $f_k$ 是 $f(\neq f_k)$ 的綫性組合. 这与 $f$ 的綫性无关性矛盾.

今定义集合 $C$ 到集合 $B$ 内的一个单值映照 $\phi$. 令 $f_k\in C$, 并且令 $e_i\equiv\phi(f_k)$ 是 $B$ 里表达式含有 $f_k$ 的这些 $e$ 中的一个 $e$. 故得整个 $C$ 到 $B$ 内的一个单值映照. 令 $B'=f(C)$ 是象集合. 如果 $e_{i'}\in B'$, 則逆象 $\phi^{-1}(e_{i'})$ 由出現于 $e_{i'}$ 的表达式里的 $f_k$ 构成. 故 $\phi^{-1}(e_{i'})$ 是一个有限集合. 于是集合 $B'$ 与逆象 $\phi^{-1}(e_{i'})$ 的集合 $\Gamma$

1) 参看第一章, §4 的引理1.
2) 参看第一章, 定理 2 及 3.

之間有一个 1—1 对应. 集合 $\Gamma$ 給出集合 $C$ 分解为非相交的有限集合的一个分解. 而且因为 $C$ 是无限的,故 $\Gamma$ 也是无限的. 于是,由基数理論里的标准定理易知 $C$ 与 $\Gamma$ 有相同基数[1]. 所以 $B'$ 的基数与 $C$ 的基数相同; 因此 $B$ 的基数大于或等于 $C$ 的基数. 如果把 $B$ 与 $C$ 的地位对調,则知 $B$ 的基数不能超过 $C$ 的基数. 故由柏恩斯坦 (Bernstein) 定理知,这两个集合有相同的基数.

与有限情形一样,任意基的基数叫做 $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}$ 的維数. 也与有限情形一样, 我們可以任意給定的基数为維数在任意給定的 $\Delta$ 上作一个向量空間. 为着这个目的,令 $I$ 是具有給定基数的一个集合. 令 $\mathfrak{R}$ 是定义在 $I$ 上的这样函数的集合, 它們的值 $x(i)\in\Delta$, 并且除了有限个的 $i\in I$ 外,对于其他所有 $i$ 都使 $x(i)=0$. 由坐标的加法来定义两个这样函数的和, 并由 $\Delta$ 的給定元素左乘坐标来定义純量积. 这两个合成产生 $\mathfrak{R}$ 里的結果, 并且显然滿足向量空間的公理. 今决定 $\mathfrak{R}$ 的一个特殊基. 对于每个 $i\in I$,定义 $e_i$ 为使

$$e_i(j)=\delta_{ij} \tag{1}$$

的向量. 我們易知这些向量是綫性无关的. 如果 $x$ 是任意向量, 令 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 是使 $x(i)\neq 0$ 的那些 $i$. 如果 $x(i_j)=\xi_j$, 則显然 $x=\xi_1 e_{i_1}+\xi_2 e_{i_2}+\cdots+\xi_m e_{i_m}$. 所以 $e_i$ 构成一个基. 因为 $i\leftrightarrow e_i$ 是一个 1—1 对应,这个基与 $I$ 有相同的基数.

还要指出, 有相同維数的任意两个向量空間与有限情形一样是等价的. 特别是任意向量空間与上面作出的那个类型的函数空間是等价的.

**3. 子空間** 第一章里講的有限維向量空間的子空間格的所有性質在无限情形几乎都成立. 关于鏈条件必須除外,事实上这些条件中沒有一个对于带有无限基的向量空間能够成立.

前面考察里, 只在証明一个子空間的余空間的存在性时用到基. 現在可用性質 2) 来引出用于証明这个結果的論点. 令 $\mathfrak{S}$ 是

1) 例如,参看西尔平斯基(Sierpinski) 著的超限数教程 (Leçons sur les Nombres Transfinis), 1928 年在巴黎出版.

$\mathfrak{R}$ 的一个子空間，則知 $\mathfrak{S}$ 有一个基 $S$。因为 $S$ 是一个綫性无关集合，故可嵌入 $\mathfrak{R}$ 的一个基 $B$ 里。我們記 $B = S \cup T$，这里 $S \cap T$ 是空集合，并令 $\mathfrak{S}'$ 是由 $T$ 里向量生成的空間。則立得 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}'$，而 $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}' = 0$。所以，$\mathfrak{S}'$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个余空間。

这里使用的論証也可用于証明 $\mathfrak{R}$ 的任意子空間的特殊类型的基的存在。其結果是下面的定理。

**定理 1.** 令 $\mathfrak{R}$ 有一个基 $B = (e_i)$。如果 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的任意子空間，則可把 $B$ 分为兩个非相交子集合 $C = (e_j)$，$D = (e_k)$，使 $\mathfrak{S}$ 有形狀如 $f_j = e_j + u_j$ 的一个基，这里 $u_j$ 是屬于由 $D$ 生成的空間，而 $f_j \rightarrow e_j$ 是 $\mathfrak{S}$ 的基 $(f_j)$ 到 $C$ 上的一个 1—1 映照。

証 这里存在有由 $B$ 的一个子集合 $D = (e_k)$ 生成的 $\mathfrak{S}$ 的余空間 $\mathfrak{S}'$。令 $C = (e_j)$ 是 $B$ 里 $D$ 的余集合，則每个 $e_j = f_j - u_j$，这里 $f_j \in \mathfrak{S}$，而 $u_j \in \mathfrak{S}'$，并且即将証明 $(f_j)$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个基。集合 $(f_j)$ 是綫性无关的；这因为，令 $\sum \beta_j f_j = 0$，則 $\sum \beta_j e_j + \sum \beta_j u_j = 0$；于是由 $e_j$ 的綫性无关性知每个 $\beta_j = 0$。集合 $(f_j)$ 生成 $\mathfrak{S}$；这因为，如果 $y \in \mathfrak{S}$，則 $y = \sum \beta_j e_j + \sum \gamma_k e_k = \sum \beta_j f_j - \sum \beta_j u_j + \sum \gamma_k e_k$。于是，$y - \sum \beta_j f_j \in \mathfrak{S}'$；从而 $y - \sum \beta_j f_j = 0$。最后講到：如果 $e_j$ 及 $e_{j'}$ 是 $C$ 里不同的元素，則 $f_j \neq f_{j'}$。否則，$e_j - e_{j'} \in \mathfrak{S}'$，这与 $B$ 是一个基矛盾。故知映照 $e_j \rightarrow f_j$ 是 1—1 的，而这就結束了証明。

定理 1 是諾德(Noether)发現的。所以这种类型的一个基可叫做子空間 $\mathfrak{S}$ 关于 $\mathfrak{R}$ 的基 $B$ 的**諾德基**。

**4. 綫性变換及陣** 有限維向量空間的綫性变換与有限陣之間的联系可直接轉移于无限情形。

令 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{S}$ 是 $\Delta$ 上向量空間，并令 $B = (e_i)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基。首先要說，$B$ 到 $\mathfrak{S}$ 內的任意映照 $e_i \rightarrow y_i$ 可有一个方法而且只有一个方法扩张为 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{S}$ 內的一个綫性变換。容易驗証：这个扩张把 $\sum_1^m \xi_j e_{i_j}$ 映到 $\sum_1^m \xi_j y_{i_j}$[1]。次令 $C = (f_k)$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个基，并把 $e_i$

1) 这建立了 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{S}$ 內的非当然的綫性变換的存在。要这样做似乎不可能不用到基。

关于綫性变换 $A$ 的象写为

(2) $$e_iA = y_i = \sum\alpha_{ik}f_k,$$

这里和是有限項的. 因此陣 $(\alpha_{ik})$ 是行有限的, 亦即对于一个固定的 $i$, 只有有限个 $k$ 使 $\alpha_{ik} \neq 0$. 一般地說, 如果 $I$ 及 $J$ 是任意两个集合, 则积集合 $I \times J$ 到 $\Delta$ 内的一个函数叫做一个 $\Delta$ 上 $I \times J$ 陣. 于是, 我們建立了 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{S}$ 内的綫性变换与 $\Delta$ 上行有限的 $I \times J$ 陣之間的一个对应. 这个对应当然与基的选取有关. 在 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$ 的特殊情形, 自然取 $C$ 与基 $B$ 相同. 于是得一个 $I \times I$ "方"陣为 $A$ 关于基 $B$ 的陣.

也与有限情形一样, 我們容易驗証: 由(2)所決定的对应 $A \to (\alpha)$ 是綫性变换的集合 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 到行有限的 $I \times J$ 陣的集合上的 1—1 映照. 与两个变换的和对应的陣可由把两个陣的各个对应分量 $\alpha_{ii'}$ 与 $\beta_{ii'}$ 相加而得. 故行有限的陣关于这个运算成一个羣.

如果 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$, 而 $A$ 的陣由单一的基决定, 则可見陣 $AB$ 的元素 $\gamma_{i\lambda}$ 是

(3) $$\gamma_{i\lambda} = \sum_k \alpha_{ik}\beta_{k\lambda},$$

这里 $A \to (\alpha)$ 而 $B \to (\beta)$. (3)里的和是有限項的, 而积陣 $(\gamma) = (\alpha)(\beta)$ 是行有限的. 故 $I \times I$ 行有限的陣的集合 $\Delta_I$ 带着上述的加法及乘法是一个环, 与环 $\mathfrak{L}$ 同构.

基的改变也可象有限情形一样討論. 如果有 $\mathfrak{R}$ 的另一个基, 则可設已經把它安排使与同一个下标集合 $I$ 成 1—1 对应. 如果用 $f_i$ 表这个基里的向量, 则可写下

(4) $$f_k = \sum\mu_{ki}e_i, \quad e_i = \sum\nu_{ik}f_k,$$

这里 $(\mu)$ 及 $(\nu)$ 都是行有限的 $I \times I$ 陣. 易知 $(\mu)(\nu) = 1 = (\nu)(\mu)$, 这里 1 是元素为 $\delta_{ik}$ 的陣. 故 $(\mu)$ 是 $\Delta_I$ 里一个单位, 亦即它有一个双側逆陣 $(\nu) = (\mu)^{-1}$. 反过来, 如果 $(\mu)$ 是任意单位, 则由(4)里第一个方程組所定义的 $f_k$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基.

如果 $A$ 是一个綫性变换, 它关于基 $(e_i)$ 的陣是 $(\alpha)$, 则可直接驗証: $A$ 关于 $(f_i)$ 的陣是 $(\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}$.

**5. 共軛空間的維数** 如果 $\mathfrak{R}$ 是一个有限維向量空間，則知 $\mathfrak{R}$ 上綫性函数的右向量空間 $\mathfrak{R}^*$ 与 $\mathfrak{R}$ 有相同的維数．有限与无限的理論間的基本差別是：当 $\mathfrak{R}$ 为无限維时这个結果不再成立．在无限情形我們将証 $\dim\mathfrak{R}^* > \dim\mathfrak{R}$．更确定地說，我們将証：如果 $\Delta$ 的基数是 $d$，而 $\mathfrak{R}$ 的維数是 $b$，則 $\mathfrak{R}^*$ 的維数是 $d^b$，它是基数 $b$ 的一个集合到基数 $d$ 的一个集合的映照的集合的基数．今先証下面的引理．

**引理 1.** 如果 $\dim\mathfrak{R} = b$ 是无限的，而 $\Delta$ 的基數是 $d$，則 $\mathfrak{R}$ 的基數是 $bd$．

**証** 如果 $(e_i)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基，則 $\mathfrak{R}$ 里每个非零向量 $x$ 有唯一的表示如

$$x = \sum_{j=1}^{N} \xi_{i_j} e_{i_j}, \quad \xi_{i_j} \neq 0.$$

故每个 $x \neq 0$ 可与一个唯一决定的子集合 $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_N}$ 相伴，并且与一个唯一的 $N$-元組 $(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \cdots, \xi_{i_N})$ 相伴，这里各个分量属于 $\Delta$，且 $\neq 0$．因为 $(e_i)$ 是无限的，所以由含有 $(e_i)$ 的 $N$ 个元素的子集合构成的集合的基数等于 $b$[1]．另一方面，$N$-元組 $(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \cdots, \xi_{i_N})$ 的集合的基数或是 $d(=d^N)$，或是有限的．不論那一种情形，由集合 $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_N}$ 及 $N$-元組 $(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \cdots, \xi_{i_N})$ 构成的集合的基数是 $db$．所以，$\mathfrak{R}$ 的基数是 $db + db + \cdots$；故它只是 $db$．

$\mathfrak{R}$ 上任意綫性函数由它对于 $\mathfrak{R}$ 的基 $(e_i)$ 的值所决定；并且有一个綫性函数存在使 $f(e_i)$ 是 $\Delta$ 的任意元素．故 $\mathfrak{R}^*$ 与 $(e_i)$ 到 $\Delta$ 內的映照集合之間有一个 1—1 对应．所以 $\mathfrak{R}^*$ 的基数是 $d^b$．另一方面，如果 $b^* = \dim\mathfrak{R}^*$，則引理 1 指出 $\mathfrak{R}^*$ 的基数是 $db^*$．所以 $db^* = d^b$．因为 $db^*$ 是 $d$ 与 $b^*$ 中較大的那一个，如果能証得 $b^* \geqslant d$，則可导出 $b^* = d^b$．因为 $b^*$ 显然是无限的，如果 $d \leqslant$ 阿列夫零，則关系 $b^* \geqslant d$ 成立．所以从現在起假定 $d >$ 阿列夫零．

---

1) 这可由著名的結果 $b^N = b$ 导出．参看西尔平斯基著超限数教程（"Leçons sur les Nombres Transfinis"），第 217 頁．

要在这个情形下建立所需要的不等式，我們考虑可数序列$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots)$的集合，这里$\gamma_i \in \Delta$. 如果由这样序列的一个集合$F$里选取的每个有限方陣是满秩的，則这个集合$F$叫做强无关的. 我們从$F$选一个有限方陣是由先挑取有限个序列

$$(\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \cdots), \ (\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}, \cdots), \ \cdots, \ (\gamma_1^{(n)}, \gamma_2^{(n)}, \cdots),$$

然后取下标的一个集合$i_1, i_2, \cdots, i_n$，即得陣

$$\begin{bmatrix} \gamma_{i_1}^{(1)} & \gamma_{i_2}^{(1)} & \cdots & \gamma_{i_n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{i_1}^{(n)} & \gamma_{i_2}^{(n)} & \cdots & \gamma_{i_n}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

今証下面的引理.

**引理 2.** 存在有序列的一个强无關集合，它的基數$\geqslant d$[1].

証 我們由包含关系把强无关集合$F$編成偏序. 如果这些集合的一組$\{F\}$是綫性有序的，显然$\cup F$是强无关的. 由佐恩引理知：有一个极大强无关集合$M$存在. 今用归納法証明：如果$M$的基数小于$d$，则可作一个序列$X \notin M$使$M \cup \{X\}$是强无关的，这与$M$的极大性矛盾. 設已找到$X$的为首$p$个元素$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p$使由$M \cup (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p)$选出的每个$q \times q$陣是满秩的，这里$q \leqslant p$. 我們将决定$\xi_{p+1}$使由$M \cup (\xi_1, \cdots, \xi_{p+1})$选出的每个$r \times r$陣是满秩的，这里$r \leqslant p+1$. 这个施于$\xi_{p+1}$上的要求的条件是，每个下面形状的陣是满秩陣：

$$(5) \qquad \begin{bmatrix} & & & * \\ & A & & \vdots \\ & & & * \\ \xi_{i_1} & \xi_{i_2} & \cdots \ \xi_{i_{r-1}} & \xi_{p+1} \end{bmatrix},$$

这里$A$是由$M$决定的一个$(r-1) \times (r-1)$陣. 因为对于形状(5)的每个陣把$\xi_{p+1}$看作一个不定量时，在$\Delta$里$\xi_{p+1}$的选取只有一个值使(5)为降秩陣. 由于$A$是滿秩陣，所以它的行向量是左

---

1) 这个引理是卡浦兰斯基通知作者的，由卡浦兰斯基与儿尔朵斯 (P. Erdös) 合作証明。

綫性无关的．故行向量 $(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \cdots, \xi_{i_{r-1}})$ 可有一个方法而且只有一个方法写为 $A$ 的各行的綫性組合．如果 $\mu$ 表示 (5) 的末列的元素的同样綫性組合，則在 $\xi_{p+1} \neq \mu$ 时，(5) 是滿秩的．其次注意到陣(5)（在(5)里 $\xi_{p+1}$ 是一个不定量）的集合的基数小于 $d$．由假設，$M$ 的基数小于 $d$；而我們所考虑的陣的集合的基数是由 $M$ 挑选的 $r-1$ 个序列的集合的基数与在整数 $1, 2, \cdots, p$ 里选取的 $r-1$ 个元素的基数的积．結果或是有限的，或是 $M$ 的基数．在任一种情形下，它是小于 $d$．因为 $\Delta$ 的基数是 $d$，我們可选一个 $\xi_{p+1}$ 使所有的陣 (5) 是滿秩陣．这就完成了用归納法証明使 $M \cup \{X\}$ 是強无关的 $X$ 的存在．故与 $M$ 的极大性矛盾，而引理就給証明了．

今可証主要結果．

**定理 2.** 如果 $\mathfrak{R}$ 是一个无限維 $b$ 的向量空間，而可除環 $\Delta$ 的基数是 $d$，則 $\mathfrak{R}^*$ 的維数 $b^*$ 是 $d^b$．

証 我們已知只要証明 $b^* \geqslant d$ 就够了，并且我們可假定 $d >$ 阿列夫零．令 $(e_i)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个基，并在 $(e_i)$ 里选取一个可数的集合 $(e_j)$．令 $M$ 是可数序列的一个強无关集合．对于每个 $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots) \in M$，我們可定义一个綫性函数 $f$ 使 $f(e_j) = \gamma_j$．这样由 $M$ 的元素得出的綫性函数的集合是一个綫性无关集合．它的基数与 $M$ 的基数相同．所以由引理 2 可設它是 $\geqslant d$．这証明 $\mathfrak{R}^*$ 里至少存在有 $d$ 个綫性无关元素；所以得 $b^* \geqslant d$，而 $b^* = d^b$．

关系 $b^* = d^b$ 自然可推得 $b^* > b$．如果 $b^{**} \equiv \dim \mathfrak{R}^{**}$，則还有 $b^{**} > b^* > b$．这个結果指出 $\mathfrak{R}$ 不能与 $\mathfrak{R}^*$ 上綫性函数的空間恆等．

### 習 題 67

1．（馬基 (Mackey)）．令 $\mathfrak{R}$ 是域 $\Phi$ 上一个向量空間．証明：序列 $\xi_\gamma = (\gamma, \gamma^2, \gamma^3, \cdots)$ 的集合是綫性无关的，这里 $\gamma \neq 0$，$\gamma \in \Phi$．

（注：这导致定理 2 对于可交換情形的一个初等証明．）

**6．綫性变換的有限拓扑** 今将介紹向量空間 $\mathfrak{R}$ 到向量空間 $\mathfrak{S}$ 的綫性变換的集合 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 里某种拓扑．我們的拓扑是平凡的（亦即离散的）拓扑必須而且只須 $\mathfrak{R}$ 是有限維的．于是，这給出有

限与无限理論之間的另一个重要的差异点.

我們知道，一个拓扑空間是由一个集合 $E$ 及 $E$ 的子集合的集合(叫做开集合)构成，使

1. 开集合的任意集合的邏輯和是开集合.

2. 任意有限个开集合的交是开集合.

3. 集合 $E$ 与空集合都是开集合[1].

令 $\mathfrak{B}$ 是开集合的集合里一个子集合，如果每个开集合是 $\mathfrak{B}$ 的元素的一个邏輯和，则 $\mathfrak{B}$ 叫做一个基. 如果 $\mathfrak{B}$ 是一个基，则 $\mathfrak{B}$ 的任意两个元素的交是 $\mathfrak{B}$ 的元素的邏輯和. 反过来，如果 $E$ 是任意集合，而 $\mathfrak{B}$ 是它的子集合的集合能使它們的邏輯和是 $E$，并且 $\mathfrak{B}$ 的任意两个元素的交是 $\mathfrak{B}$ 的元素的一个邏輯和，則可設 $\mathfrak{B}$ 的元素的邏輯和为开集合. 結果的集合适合 1—3；所以它与集合 $E$ 定义一个拓扑空間. 如果給出一个集合 $E$ 的子集合的集合，适合上面各条件，則設 $E$ 拓扑化. 开集合的集合叫做 $E$ 的一个拓扑.

今考慮集合 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$. 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 与 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 分别是 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{S}$ 的有限子集合，則定义 $O(x_i; y_i)$ 是 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{S}$ 内所有能使 $x_iA = y_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 的綫性映照 $A$ 的集合. 任意两个 $O(x_i; y_i)$ 的交显然是另一个 $O(x_i; y_i)$. 所以这个集合可用为 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 里一个拓扑的一个基. 这个拓扑叫做 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 的有限拓扑. 今評述：任意开集合 $O(x_i; y_i)$ 或是空集合或是与一个开集合 $O(x_j; y_j)$ 相重合，这里 $x_j$ 是綫性无关的. 这因为，設 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的一个极大綫性无关子集合，并令 $x_k = \sum_{j=1}^{r} \beta_{kj} x_j$ 对于 $k = r+1, \cdots, m$ 成立，則除非 $y_k = \sum \beta_{kj} y_j$，$O(x_i; y_i)$ 必定是空集合. 另一方面，如果条件能成立，則 $O(x_i; y_i) = O(x_j; y_j) (j = 1, 2, \cdots, r)$. 这个說明指出，$x_j$ 是綫性无关时，$O(x_j; y_j)$ 构成我們的拓扑的一个基.

至此可見，(有有限拓扑的)拓扑空間 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 是离散的，亦即

---

1) 在討論里我們使用勒夫謝茲 (Lefschetz) 著的代数拓扑学 (Algebraic Topology)，第一章里的术語.

說每个子集合是开集合，必須而且只須 $\mathfrak{R}$ 是有限維的．这因为，先令 $\mathfrak{R}$ 有有限基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，并令 $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$，则 $O(e_i; e_iA) = (A)$，而 $A$ 是一个开集合．故由 1 知 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 的每个子集合是开集合．次令 $\dim \mathfrak{R}$ 是无限的；如果 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是一个綫性无关集合，則 $O(x_j; y_j)$ 是一个非可数集合．这因为，我們可补充 $x_j$ 成一个基，并且有一个基的元素映到 $\mathfrak{S}$ 的任意元素的一个綫性变換存在．于是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 的每个开集合是非可数的；因此拓扑不是离散的．

其次要証：$\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 是一个拓扑羣，亦即 $A-B$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 里两个变数 $A, B$ 的一个連續函数．最后，如果 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$，因而 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ 是一个环，则 $\mathfrak{L}$ 是一个拓扑环，亦即具有 $A-B$ 的連續性之外，还具有乘法合成的連續性．令 $A$ 与 $B$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 的固定元素，并令 $O(x_i; y_i)$ 是含有 $A-B$ 的基的一个元素．这样一个集合叫做点的邻域．因为 $A-B \in O(x_i; y_i)$，故可写 $y_i = x_i(A-B)$，因而 $O(x_i; y_i) = O(x_i; x_i(A-B))$．但 $O(x_i; x_iA)$ 及 $O(x_i; x_iB)$ 分别是 $A$ 及 $B$ 的邻域，并且显然如果 $X \in O(x_i; x_iA)$ 而 $Y \in O(x_i; x_iB)$，则 $X - Y \in O(x_i; x_i(A-B))$．这証明了差合成是連續的．

次令 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$，并令 $O(x_i; x_iAB)$ 是 $AB$ 的任意邻域．則 $O(x_i; x_iA)$ 及 $O(x_iA; x_iAB)$ 分别是 $A$ 及 $B$ 的邻域．所以，如果 $X \in O(x_i; x_iA)$ 而 $Y \in O(x_iA; x_iAB)$，則 $XY \in O(x_i; x_iAB)$．故乘法是一个連續合成．

我們知道，如果一个拓扑空間 $E$ 的一个子集合的余集合是开集合，則这个子集合叫做閉集合．閉集合适合与 1—3 对偶的条件．特别是，任意个閉集合的交是閉集合．含有 $E$ 的一个子集合 $S$ 的所有閉集合的交叫做 $S$ 的閉包，記作 $\mathrm{Cl}\, S$；則知 $E$ 的任意子集合 $S$ 有一个閉包（因为 $E$ 自身是閉集合，故含有 $S$ 的閉集合存在）．$S$ 的閉包也可定义为点 $p$（$E$ 的元素）的全体，这里 $p$ 适合下面的性質：$p$ 的每个邻域与 $S$ 有非空的交．今用下面的例說明綫性变換的有限拓扑里这些概念．

**例** 令 $\mathfrak{R}$ 是带有一个可数基 $(e_i)$ 的无限域 $\Phi$ 上一个向量空間. 令 $(\alpha_i)$ 是 $\Phi$ 里不同元素的一个可数集合,并令 $A$ 是使 $e_iA = \alpha_i e_i$ 的綫性变换. 今欲决定含 $A$ 的多項式的集合 $\Phi[A]$ 的閉包 $\mathrm{Cl}\,\Phi[A]$. 首先看到: 集合 $O^{(r)}(B) = O(e_j; e_jB)$ $(j = 1, 2, \cdots, r;\ r = 1, 2, \cdots)$ 构成点 $B$ 的邻域的完全集合; 亦即, 含 $B$ 的任意开集合必含有这些集合中的一个. 令 $O(x_k; x_kB)$ 是 $B$ 的一个邻域, 这里 $x_k$ 是綫性无关的, 则存在有一个 $r$ 使給定的 $x_k \in [e_1, e_2, \cdots, e_r]$. 故 $O^{(r)}(B) \subseteq O(x_k; x_kB)$, 而这就証明了上面的論断. 至此显然知, 一个元素 $B$ 是在集合 $M$ 的閉包里必須而且只須每个集合 $O(e_j; e_jB)$ 与 $M$ 相交. 今令 $B \in \mathrm{Cl}\,\Phi[A]$. 如果 $\phi(\lambda)$ 是一个多項式, 則 $e_i\phi(A) = \phi(\alpha_i)e_i$. 所以,如果 $\phi(A) \in O^{(r)}(B)$, 則 $e_jB = e_j\phi(A) = \phi(\alpha_j)e_j (j = 1, 2, \cdots, r)$. 这指出: $B$ 是一个对角綫性变换,亦即 $e_iB = \beta_i e_i (i = 1, 2, \cdots)$. 我們要証: $\mathrm{Cl}\,\Phi[A]$ 与对角綫性变换的集合全同. 这因为,令 $B$ 是任意对角綫性变换, 并令 $r$ 是任意整数, 考虑由 $B$ 及由多項式 $\phi(A)$ 在 $[e_1, e_2, \cdots, e_r]$ 里的誘导变换. 因为 $\alpha_i$ 是不同的,故易知 $\phi(A)$ 在这个子空間里誘导出每个对角变换. 于是,存在有一个 $\phi(A)$ 使 $e_jB = e_j\phi(A)$ $(j = 1, 2, \cdots, r)$ 成立. 这証明了 $B \in \mathrm{Cl}\,\Phi[A]$. 故 $\mathrm{Cl}\,\Phi[A]$ 是对角变换的集合.

## 習 題 68

1. 令 $\mathfrak{R}$ 是带有一个可数基 $(e_i)$ 的域上向量空間,决定 $\mathrm{Cl}\,\Phi[A]$,这里 (a) $e_iA = e_{i+1} (i = 1, 2, \cdots)$, 及 (b) $e_1A = 0$, $e_{i+1}A = e_i (i = 1, 2, \cdots)$.
2. 証明: 基本开集合 $O(x_i; y_i)$ 也是閉集合(这可推得: $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 是一个全不連通空間,亦即 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 的連通子集合只是点).
3. 証明:域上向量空間里綫性变换的每个有限維子空間在有限拓扑里是閉空間.

**7. $\mathfrak{R}^*$ 的全子空間**. 考虑綫性函数 $f$ 所成的 $\mathfrak{R}^*$ 的子集合 $\mathfrak{R}_0^*$, 这里 $f$ 关于基 $(e_i)$ 的陣是列有限的,亦即只有有限个 $i$ 使 $f(e_i) \neq 0$. 显然綫性函数的这个集合构成共軛空間的一个子空間. 对于每个 $i$ 我們用条件

$$e_i^*(e_k) = \delta_{ik} \tag{6}$$

定义一个綫性函数 $e_i^*$. 故 $e_i^*$ 是綫性函数, 它关于基 $(e_i)$ 的陣有 1 在第 $i$ 位置而其它位置都是 0. 显然 $e_i^*$ 构成 $\mathfrak{R}_0^*$ 的一个基. 于是, $\dim \mathfrak{R}_0^* = \dim \mathfrak{R}$. 至此知道, $\mathfrak{R}_0^*$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的一个全子空間; 亦即如果 $u$ 是 $\mathfrak{R}$ 内任意非零向量, 則有一个元素 $f \in \mathfrak{R}_0^*$ 存在使 $f(u) \neq 0$. 写下 $u = \beta_1 e_{i_1} + \beta_2 e_{i_2} + \cdots + \beta_m e_{i_m}$, 这里 $\beta_1 \neq 0$, 則 $e_{i_1}^*(u) = \beta_1 \neq 0$ 即为所求.

如果一个拓扑空間的一个子集合 $S$ 的閉包 $\mathrm{Cl}\,S$ 是整个空間, 則說 $S$ (在空間里) 是稠密的. 今将証: $\mathfrak{R}^*$ 的一个子空間 $\mathfrak{R}'$ 在 $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \Delta)$ 的有限拓扑里是稠密的必須而且只須 $\mathfrak{R}'$ 是全子空

間. 首先显然知，如果 $\mathfrak{R}'$ 在 $\mathfrak{R}^*$ 里是稠密的，则 $\mathfrak{R}'$ 是全子空間；否则 $\mathfrak{R}$ 里有一个非零向量 $u$ 存在，使得对于 $\mathfrak{R}'$ 里所有 $g$ 有 $g(u)=0$. 于是，对于 $\mathrm{Cl}\,\mathfrak{R}'=\mathfrak{R}^*$ 里所有 $f$, $f(u)=0$. 另一方面，我們可用 $u$ 作为一个基里的向量，并且就显見有使 $f(u)\neq 0$ 的一个綫性函数 $f$ 存在。

要証逆定理，我們使用下面关于 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{S})$ 的一个子集合的稠密性的判断准则：$\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{S})$ 的一个子集合 $\mathfrak{A}$ 在有限拓扑里是稠密的必須而且只須对于 $\mathfrak{R}$ 里綫性无关向量的每个有序集合 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 及 $\mathfrak{S}$ 里的每个有序集合 $(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，有一个 $A\in\mathfrak{A}$ 存在使 $x_iA=y_i(i=1,2,\cdots,m)$. 这个判断准则的充分性显然可由下面的事实得出：集合 $O(x_i;\,x_iB)$ 构成 $B$ 的邻域的一个基. 必要性则由下面的事实得出：綫性变换的完全集合具有判断准则所述的性质. 如果 $\mathfrak{R}'$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的一个子空間，则可把判断准则进一步化簡，而証明：如果对于 $\mathfrak{R}$ 里向量的任意綫性无关的有限集合 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，存在有 $\mathfrak{R}'$ 里向量 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_m^*$ 的一个余集合，使

$$x_i^*(x_j)=\delta_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,m),$$

则 $\mathfrak{R}'$ 是稠密的. 这因为，如果是这种情形，而 $\beta_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是 $\Delta$ 的任意元素，则函数 $f=\sum x_i^*\beta_i\in\mathfrak{R}'$ 而 $f(x_i)=\beta_i$. 故由前面的判断准则知 $\mathfrak{R}'$ 是稠密的. 今証下面的引理.

**引理** 如果 $\mathfrak{R}'$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的一个全子空間，而 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意綫性无關向量，則 $\mathfrak{R}'$ 含有与 $x_i$ 相余的向量 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_m^*$ 的集合.

証 如果 $m=1$ 则是显然的；这因为，此时可在 $\mathfrak{R}'$ 里找到一个 $f$ 使 $f(x_1)=\beta_1\neq 0$. 于是，$x_1^*=f\beta_1^{-1}$ 适合 $x_1^*(x_1)=1$. 今假定这个结果在 $m-1$ 个向量是成立的；则对于 $x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}$ 可在 $\mathfrak{R}'$ 里找到 $f_1,f_2,\cdots,f_{m-1}$ 使 $f_k(x_l)=\delta_{kl}(k,l=1,2,\cdots,m-1)$ 成立. 对于任意 $f\in\mathfrak{R}'$ 定义

$$g(x)=f(x)-\sum_{1}^{m-1}f_k(x)f(x_k).$$

则 $g\in\mathfrak{R}'$，而 $g(x_l)=0\ (l=1,2,\cdots,m-1)$. $\mathfrak{R}'$ 里还存在一

个 $f$ 使对应的 $g$ 具有性質 $g(x_m) \neq 0$. 否則对于 $\mathfrak{R}'$ 里所有 $f$ 得

$$0 = g(x_m) = f(x_m) - \sum_1^{m-1} f_k(x_m) f(x_k)$$

$$= f\left(x_m - \sum_1^{m-1} f_k(x_m) x_k\right).$$

这可推得 $x_m = \sum_1^{m-1} f_k(x_m) x_k$, 而与 $x$ 的綫性无关性矛盾. 今选取 $f$ 使 $g(x_m) = \gamma \neq 0$, 并且定义

$$x_m^*(x) = g(x)\gamma^{-1},$$

$$x_k^*(x) = f_k(x) - x_m^*(x) f_k(x_m) \quad (k = 1, 2, \cdots, m-1),$$

則可驗証 $x_i^*$ 与 $x_j$ 相余.

这个引理完成下面定理的証明:

**定理 3.** $\mathfrak{R}^*$ 的一个子空間 $\mathfrak{R}'$ 是全子空間的充要條件是: $\mathfrak{R}'$ 在有限拓扑里是稠密的.

如果 $\mathfrak{R}$ 是有限維的, 則 $\mathfrak{R}^*$ 里有限拓扑是离散的. 故对于 $\mathfrak{R}^*$ 的每个子空間 $\mathfrak{R}'$ 的閉包 $\mathrm{Cl}\,\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'$. 故 $\mathfrak{R}^*$ 的全子空間只有 $\mathfrak{R}^*$ 自身. 另一方面, 由本节开始时給出的例子指出: 对于无限維空間 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^*$ 含有眞全子空間.

### 習 題 69

1. 令 $\mathfrak{R}$ 有一个可数基, 并令 $\mathfrak{R}'$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的一个全子空間. 証明: 有 $\mathfrak{R}$ 的一个基 $(u_i)$ 存在, 它有 $\mathfrak{R}'$ 里向量 $(u_i^*)$ 的一个余集合, 亦即 $u_i^*(u_j) = \delta_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots)$ 成立.

2. (馬基). 令 $\mathfrak{R}$ 有一个可数基, 并令 $\mathfrak{R}'$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的一个全子空間, 且 $\mathfrak{R}'$ 有一个可数基. 証明: $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}'$ 有相余基.

3. 令 $\mathfrak{R}$ 有一个可数基, 并令 $\mathfrak{R}'$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的一个全子空間且有一个可数基, 令 $(e_i)$, $(e_i^*)$ 是余基. 証明: 基 $(f_i)$ 在 $\mathfrak{R}'$ 里没有余集合, 这里 $f_1 = e_1$, 而在 $i > 1$ 时 $f_i = e_i + e_{i-1}$.

**8. 对偶空間. 克伦内克积** 令 $\mathfrak{R}'$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的一个全子空間, 并令 $x \in \mathfrak{R}$. 則映照 $f \to x(f) \equiv f(x)$ 是 $\mathfrak{R}'$ 上一个綫性函数, 亦即它是 $\mathfrak{R}'$ 的共軛空間 $\mathfrak{R}'^*$ 的一个元素. 映照 $x \to x(f)$ 是 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{R}'^*$ 內的一个綫性变换, 并且因为 $\mathfrak{R}'$ 是全子空間, 故这个綫性变换是 1-1 的. 又因象空間是 $\mathfrak{R}'^*$ 的一个全子空間, 故在一定意义下, 我們討

論里的 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}'$ 可以互換. 与有限情形一样,对称性在这种情况里是蘊藏着,但可由引入双綫性形式的概念及左向量空間 $\mathfrak{R}$ 与右向量空間 $\mathfrak{R}'$ 之間的对偶性概念而显露出来. 如果 $g(x, y')$ 是双綫性形式,而对于所有 $y'\in\mathfrak{R}'$, 能从 $g(z, y')=0$ 推得 $z=0$, 及对于所有 $x\in\mathfrak{R}$, 能从 $g(x, z')=0$ 推得 $z'=0$, 則这个双綫性形式 $g(x, y')$ 叫做**非退化的**. 如果双綫性形式 $g(x, y')$是非退化的,則說左向量空間 $\mathfrak{R}$ 与右向量空間 $\mathfrak{R}'$ 是关于 $g(x, y')$ **对偶的**. 如果 $\mathfrak{R}'$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的一个全子空間, 則 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}'$ 是关于双綫性形式 $s(x, f)=f(x)=x(f)$ 对偶的. 反过来, 如果 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}'$ 是关于 $g(x, y')$ 对偶的, 則每个 $y'\in\mathfrak{R}'$ 定义 $\mathfrak{R}$ 上一个綫性函数 $g_{y'}(x)$, 而映照 $y'\to g_{y'}$ 是 $\mathfrak{R}'$ 到 $\mathfrak{R}^*$ 的一个全子空間上的 1—1 綫性变換. 同理, $g(x, y')$ 可用于定义 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{R}'^*$ 的一个全子空間上的 1—1 綫性映照.

关于全子空間的結果可直接轉移到对偶空間. 特别是两个对偶空間的每个在另一个里定义一个拓扑, 它与共軛空間里的有限拓扑对应. 故令 $\mathfrak{R}$ 及 $\mathfrak{R}'$ 是对偶的,并令 $\phi(\mathfrak{R}')$是与 $\mathfrak{R}'$ 对应的 $\mathfrak{R}^*$ 的全子空間. 則 $\phi(\mathfrak{R}')$ 有由 $\mathfrak{R}^*$ 継承的一个拓扑: $\phi(\mathfrak{R}')$ 的各个开集合都是 $\mathfrak{R}^*$ 的各个开集合与集合 $\phi(\mathfrak{R}')$的交(这是标准子空間拓扑). 今可使用 $\phi(\mathfrak{R}')$与 $\mathfrak{R}'$ 之間的 1—1 对应把 $\phi(\mathfrak{R}')$的拓扑轉移为 $\mathfrak{R}'$ 里一个拓扑. 得出的結果是: $\mathfrak{R}'$ 的开集合都是基本开集合 $O(x_i;\beta_i)$ $(i=1, 2, \cdots, r)$ 的邏輯和, 这里 $O(x_i;\beta_i)$ 是能使 $g(x_i, y')=\beta_i$ 的 $y'\in\mathfrak{R}'$ 的全体. $\mathfrak{R}'$ 的这个拓扑将叫做 **$\mathfrak{R}$-拓扑**. 仿此可定义 $\mathfrak{R}$ 的一个 **$\mathfrak{R}'$-拓扑**.

令 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}'$ 是关于 $g(x, y')$对偶的. 与有限維情形一样,如果 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子空間,則以 $j(\mathfrak{S})$表示 $\mathfrak{R}'$ 的子空間,它的向量 $y'$ 与 $\mathfrak{S}$ 里每个 $x$ 关联,亦即使 $g(x, y')=0$. 同理, $\mathfrak{R}$ 的 $j(\mathfrak{S}')$ 的一个子空間可与 $\mathfrak{R}'$ 的每个子空間 $\mathfrak{S}'$ 相伴. 下面法則是容易建立的:

(i) 如果 $\mathfrak{S}_1\supseteq\mathfrak{S}_2$, 則 $j(\mathfrak{S}_1)\subseteq j(\mathfrak{S}_2)$;

(ii) $j(j(\mathfrak{S}_1))\supseteq\mathfrak{S}_1$,

(iii) $j(j(j(\mathfrak{S}_1)))=j(\mathfrak{S}_1)$.

前两个是显然的. 要証 (iii) 可用 $j(\mathfrak{S}_1)$ 代替 (ii) 里的 $\mathfrak{S}_1$, 则得 $j(j(j(\mathfrak{S}_1))) \supseteq j(\mathfrak{S}_1)$. 另一方面,因为 $j(j(\mathfrak{S}_1)) \supseteq \mathfrak{S}_1$, 由 (i) 推得 $j(j(j(\mathfrak{S}_1))) \subseteq j(\mathfrak{S}_1)$. 如果 $\mathfrak{R}$ (因此 $\mathfrak{R}'$)是有限維的,則映照 $\mathfrak{S} \to j(\mathfrak{S})$ 是 $\mathfrak{R}$ 的子空間格到 $\mathfrak{R}'$ 的子空間格上的 1—1 映照. 但在无限維情形不必成立. 例如,令 $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^*$,这里 $\mathfrak{R}^*$ 是完全共軛空間. 如果 $\mathfrak{R}'$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的一个全子空間与 $\mathfrak{R}^*$ 不同,則即使 $\mathfrak{R}' \neq \mathfrak{R}^*$, 可有 $j(\mathfrak{R}') = 0 = j(\mathfrak{R}^*)$. 今将証: $j$-映照誘导出 $\mathfrak{R}$ 的閉子空間的集合到 $\mathfrak{R}'$ 的閉子空間的集合上的一个 1—1 映照.

首先观察到, 如果 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的任意子空間, 則双綫性形式 $g$ 决定結連空間 $\mathfrak{S}$ 与商空間 $\mathfrak{R}' - j(\mathfrak{S})$ 的一个双綫性形式 $\bar{g}$. 我們用 $\bar{g}(x, \bar{y}') = g(x, y')$ 来定义 $\bar{g}(x, \bar{y}')$, 这里 $\bar{y}' = y' + j(\mathfrak{S})$. 因为 $y'$ 的两种选择是对模 $j(\mathfrak{S})$ 同余的, 按这个方法显然得 $(x, \bar{y}')$ 的集合到 $\Delta$ 内的一个单值映照. 我們可直接驗証: $\bar{g}$ 是一个双綫性形式. 如果 $x \in \mathfrak{S}$ 是非零的, 則知有一个 $y'$ 存在使 $g(x, y') \neq 0$. 于是, $\bar{g}(x, \bar{y}') \neq 0$. 另一方面,假定 $\bar{y}'$ 是 $\mathfrak{R}' - j(\mathfrak{S})$里一个向量, 对于所有 $x \in \mathfrak{S}$ 能使 $\bar{g}(x, \bar{y}') = 0$, 則对于所有 $x$, $g(x, y') = 0$, 而 $y' \in j(\mathfrak{S})$. 故 $\bar{y}' = 0$. 这些提示指出: 两个向量空間 $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}' - j(\mathfrak{S})$ 是关于双綫性形式 $\bar{g}$ 对偶的. 今可証下面的定理.

**定理 4.** 如果 $\mathfrak{S}'$ 是 $\mathfrak{R}'$ 的一个子空間, 則 $j(j(\mathfrak{S}'))$ 是 $\mathfrak{S}'$ 在 $\mathfrak{R}'$ 的 $\mathfrak{R}$-拓扑里的閉包,特別是, $\mathfrak{S}'$ 是閉的必須而且只須 $j(j(\mathfrak{S}')) = \mathfrak{S}'$.

証 由拓扑的定义直接知,如 $j(\mathfrak{S})$, $j(\mathfrak{S}')$ 形狀的子空間都是閉的. 因为 $j(j(\mathfrak{S}')) \supseteq \mathfrak{S}'$, 故 $j(j(\mathfrak{S}')) \supseteq \mathrm{Cl}\,\mathfrak{S}'$. 反过来, 令 $u' \in j(j(\mathfrak{S}'))$ 并考虑 $u'$ 的任意邻域 $O(x_i; g(x_i, u'))$. 令 $\mathfrak{X}$ 是由 $x_i$ 生成的有限維空間, 并令 $(y_1, y_2, \cdots, y_r)$ 是这个空間的一个基, 使 $(y_1, y_2, \cdots, y_s)$ 是 $j(\mathfrak{S}') \cap \mathfrak{X}$ 的一个基. 陪集 $\bar{y}_k = y_k + j(\mathfrak{S}')$ $(k = s+1, \cdots, r)$ 在 $\mathfrak{R} - j(\mathfrak{S}')$ 里是綫性无关的. 因为 $\mathfrak{S}'$ 与 $\mathfrak{R} - j(\mathfrak{S}')$ 关于 $\bar{g}(x + j(\mathfrak{S}'), y') = g(x, y')$ 是对偶的,故由前节的引理可推得有一个 $v' \in \mathfrak{S}'$ 存在使 $\bar{g}(y_k + j(\mathfrak{S}'), v') = g(y_k, u')$ $(k = s+1, \cdots, r)$ 成立. 故 $g(y_k, v') = g(y_k, u')$. 另一方面,

$g(y_j; v')=0=g(y_j, u')$ $(j=1, 2, \cdots, s)$，所以 $v' \in O(y_i; g(y_i, u'))$. 因为 $O(y_i; g(y_i, u'))=O(x_i; g(x_i, u'))$ $(i=1, 2, \cdots, r)$，所以 $v'$ 在 $u'$ 的給定邻域 $O(x_i; g(x_i, u'))$ 里. 这指出 $u' \in \mathrm{Cl}\mathfrak{S}'$；于是，$\mathrm{Cl}\,\mathfrak{S}' = j(j(\mathfrak{S}'))$，这是所要証的.

今考虑映照 $\mathfrak{S} \to j(\mathfrak{S})$，这里 $\mathfrak{S}$ 周历 $\mathfrak{R}$ 的閉子空間的集合. 因为对于閉子空間 $\mathfrak{S}$ 有 $j(j(\mathfrak{S})) = \mathfrak{S}$，这个映照显然是 1—1 的. 因为 $\mathfrak{R}'$ 的每个閉子空間有形状 $\mathfrak{S}' = j(j(\mathfrak{S}'))$，映照是映到 $\mathfrak{R}'$ 的閉子空間的集合上的一个映照. 这証明了前此所作的論断.

任意給定的向量空間的对偶空間的存在使我們能够把在有限情形关于任意右向量空間 $\mathfrak{R}'$ 及任意左向量空間 $\mathfrak{S}$ 的直接积羣的存在的証明[1] 移用于无限情形. 与前一样，令 $\mathfrak{R}$ 是 $\mathfrak{R}'$ 关于双綫性形式 $g$ 的对偶空間. 考虑具有形状

$$x \to \sum_{1}^{m} g(x, x_i')y_i$$

的 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{S}$ 内的綫性变换的集合 $\mathfrak{P}$，这里 $x_i' \in \mathfrak{R}'$ 而 $y_i \in \mathfrak{S}$. 我們立知 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 的一个子羣. 如果 $x' \in \mathfrak{R}'$ 而 $y \in \mathfrak{S}$，則定义 $x' \times y$ 是属于羣 $\mathfrak{P}$ 的綫性变换 $x \to g(x, x')y$. 于是，与有限情形一样，可驗証 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{R}'$ 与 $\mathfrak{S}$ 的一个直接积羣，$\mathfrak{P} = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$.

这个基本定义容許我們把前面許多直接积的討論轉移于无限情形. 特别是可用它来定义域上任意向量空間的克伦內克积及任意(非結合)代数的克伦內克积. 我們还可定义扩张空間 $\mathfrak{R}_\Sigma$，这里 $\mathfrak{R}$ 是任意向量空間而 $\Sigma$ 是 $\mathfrak{R}$ 的基域 $\Phi$ 的任意扩张域. 克伦內克乘法的初等性質如交換性及結合性的証明沒有用到有限性，所以这些性質在一般情形下也成立.

## 習 題 70

1. 証明：如果 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ (在 $\mathfrak{R}'$-拓扑里)的一个閉子空間，而 $\mathfrak{T}$ 是有限維，則 $\mathfrak{S}+\mathfrak{T}$ 是閉子空間.

2. 令 $\mathfrak{T}$ 是域 $\Phi$ 上一个有限維向量空間，并令 $\mathfrak{R}$ 是 $\Phi$ 上一个任意向量空間. 証

---

1) 参看第七章，§1.

明：$\mathfrak{L}(\mathfrak{R}\times\mathfrak{T},\mathfrak{R}\times\mathfrak{T})$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$ 及 $\mathfrak{L}(\mathfrak{T},\mathfrak{T})$ 关于第七章的 §5 里所定义的 $A\times B$ 的克伦内克积.

3. 証明：第2題的結果对于无限維的 $\mathfrak{R}$，$\mathfrak{T}$ 不能成立.

4. 令 $\{\mathfrak{R}_\alpha\}$ 是域 $\Phi$ 上向量空間 $\mathfrak{R}$ 的子空間的集合，并令 $\Sigma$ 是 $\Phi$ 的一个扩张域. 証明：$(\cap\mathfrak{R}_\alpha)_\Sigma=\cap\mathfrak{R}_{\alpha\Sigma}$ 在 $\mathfrak{R}_\Sigma$ 里成立.

**9. 綫性变換环里双側理想** 与有限情形一样，定义一个綫性变換 $A$ 的秩 $\rho(A)$ 为象空間 $\mathfrak{R}A$ 的維数. 仿此，腑 $\nu(A)$ 是使 $zA=0$ 的向量 $z$ 的腑空間 $\mathfrak{N}_A$ 的維数. 如果 $\mathfrak{R}_1$ 是 $\mathfrak{N}_A$ 的一个余空間，因此 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\oplus\mathfrak{N}_A$，则 $A$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_1A=\mathfrak{R}A$ 上的一个 1—1 映照. 所以 $\dim\mathfrak{R}A=\dim\mathfrak{R}_1$，并且由此可与前面一样推得 $\rho(A)+\nu(A)=\dim\mathfrak{R}$. 我們也容易証明下面的重要关系：

1. $\rho(A+B)\leqslant\rho(A)+\rho(B)$.
2. $\rho(AB)\leqslant\min(\rho(A),\rho(B))$.

这些公式容許我們定义一个无限維向量空間的綫性变換环 $\mathfrak{L}$ 里某种眞双側理想. 令 $e$ 是任意的无限基数，使 $e\leqslant b=\dim\mathfrak{R}$，并且令 $\mathfrak{L}_e$ 是綫性变換 $A_e$ 的集合要使

$$\rho(A_e)<e.$$

因为 $\rho(-A_e)=\rho(A_e)$，所以 $\mathfrak{L}_e$ 含有这个集合里每个綫性变換的負变換. 又因为两个基数中有一个是无限时，它們的和是两个基数中的較大的一个，由使用 1. 故知：$\mathfrak{L}_e$ 在加法下是閉的. 最后 2. 指出 $\mathfrak{L}_e$ 在用 $\mathfrak{L}$ 的任意元素作乘法下是閉的. 故 $\mathfrak{L}_e$ 是一个双側理想.

如果 $e$ 与 $e'$ 都是 $\leqslant b$ 的两个无限基数，而 $e<e'$，则 $\mathfrak{L}_e\subset\mathfrak{L}_{e'}$；这因为，$\mathfrak{L}_e$ 显然 $\subseteq\mathfrak{L}_{e'}$. 再則，对于任意給定的秩 $\leqslant b$，有綫性变換存在；这因为，我們可由选取 $\mathfrak{R}$ 的一个基及具有給定基数的一个子集合 $(e_k)$ 以得出这样的变換. 于是，使 $e_k\to e_k$ 而 $i\neq k$ 时 $e_i\to 0$ 的綫性变換具有所需的秩. 今秩 $e$ 的綫性变換都属于 $\mathfrak{L}_{e'}$ 而不属于 $\mathfrak{L}_{e'}$，所以 $\mathfrak{L}_e\neq\mathfrak{L}_{e'}$；因此，$\mathfrak{L}_e\subset\mathfrak{L}_{e'}$. 故知对应 $e\to\mathfrak{L}_e$ 是 1—1 的.

$\mathfrak{L}$ 的双側理想的主要結果是：理想 $\mathfrak{L}_e$ 是 $\mathfrak{L}$ 里仅有的眞双側理想. 要証这个事实，需要下面的引理.

**引理** 如果 $A$ 及 $B\in\mathfrak{L}$，而 $\rho(B)\leqslant\rho(A)$，则 $\mathfrak{L}$ 里有 $P$ 及 $Q$ 存

在使 $B = PAQ$.

証 命 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{N}_A$, 这里 $\mathfrak{N}_A$ 是 $A$ 的脑空間;同理可写 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_2 \oplus \mathfrak{N}_B$. 令 $(x_k)$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 的一个基, 而 $(y_\lambda)$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 的一个基. 因为 $\dim \mathfrak{R}_1 = \dim \mathfrak{R}A \geqslant \dim \mathfrak{R}B = \dim \mathfrak{R}_2$, 故可建立 $(y_\lambda)$ 到 $(x_k)$ 内的一个 1—1 对应 $y_\lambda \to x_\lambda$. 令 $P$ 是把 $y_\lambda$ 映到 $x_\lambda$ 内而把 $\mathfrak{N}_B$ 映到 0 内的綫性变换. 因为向量 $x_\lambda A$ 构成一个綫性无关集合,故有一个綫性变换 $Q$ 存在使 $(x_\lambda A)Q = y_\lambda B$. 于是,

$$y_\lambda PAQ = x_\lambda AQ = y_\lambda B,$$

$$zPAQ = 0 \quad (z \in \mathfrak{N}_B).$$

所以 $PAQ = B$, 即为所求.

今設 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{L}$ 里任意的眞双側理想. 令 $e$ 是最小无限基数使对于所有 $B \in \mathfrak{B}$, $e > \rho(B)$. 如果 $\mathfrak{B}$ 含有秩 $b = \dim \mathfrak{R}$ 的一个綫性变换 $B$,而 $A$ 是 $\mathfrak{R}$ 的任意綫性变换,則 $A$ 的秩 $\leqslant B$ 的秩. 故由引理得 $A = PBQ \in \mathfrak{B}$. 于是, $\mathfrak{B} = \mathfrak{L}$; 这与假設矛盾. 因此,对于每个 $B \in \mathfrak{B}$ 有 $b > \rho(B)$, 故 $e \leqslant b$. 因为 $e \leqslant b$, 故由定义指出 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{L}_e$. 另一方面, 令 $C$ 是 $\mathfrak{L}_e$ 的任意元素, 則 $\rho(C) < e$; 并且, 如果 $\rho(C)$ 是无限的,則必有一个 $B \in \mathfrak{B}$ 存在使 $\rho(B) \geqslant \rho(C)$. 由引理知,这可推得 $C \in \mathfrak{B}$. 如果 $\rho(C)$ 是有限的,則同样可証得 $C \in \mathfrak{B}$, 除非对于每个 $B$ 有 $\rho(C) > \rho(B)$. 无論怎样我們可推得 $\mathfrak{B}$ 含有秩 1 的每个綫性变换. 今将指出: 有限秩的任意变换是秩 1 的变换的和. 要証这个結果,命 $\mathfrak{R}C = [y_1, y_2, \cdots, y_m]$, 这里 $y_i$ 是綫性无关的. 于是,对于任意 $x$ 有

$$xC = \phi_1(x)y_1 + \phi_2(x)y_2 + \cdots + \phi_m(x)y_m.$$

显然 $\phi_i(x)$ 是綫性函数, 而使 $xC_i = \phi_i(x)y_i$ 的映照 $C_i$ 是秩 1 的一个綫性变换. 显然 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_m$, 并且因为我們知道 $C_i \in \mathfrak{B}$, 故知 $C \in \mathfrak{B}$. 于是, $\mathfrak{L}_e$ 里每个 $C$ 是属于 $\mathfrak{B}$, 而 $\mathfrak{B} = \mathfrak{L}_e$. 这証明了

**定理 5.** 令 $\mathfrak{L}$ 是无限維向量空間 $\mathfrak{R}$ 里綫性變換的環. 对于每个无限基數 $e \leqslant \dim \mathfrak{R}$, 我們定义 $\mathfrak{L}_e$ 为秩 $< e$ 的綫性變換的全体, 則 $\mathfrak{L}_e$ 是 $\mathfrak{L}$ 里一个眞双側理想, 并且任意的眞双側理想必与一

个 $\mathfrak{L}_e$ 重合.

我們已知,如果 $e$ 及 $e'$ 是 $\leqslant b$ 的两个无限基数,而且 $e < e'$,则 $\mathfrak{L}_e \subset \mathfrak{L}_{e'}$. 所以定理 5 指出对应 $e \rightarrow \mathfrak{L}_e$ 是 $< b$ 的无限基数的集合到 $\mathfrak{L}$ 里眞理想集合上的一个格同构. 特别是我們知道 $\mathfrak{L}$ 至少有一个眞双側理想 $\mathfrak{L}_e$,这里 $e$ 是阿列夫零. 这个理想由有限秩的变換构成,此后用 $\mathfrak{F}$ 表示它. 显然 $\mathfrak{F}$ 含于 $\mathfrak{L}$ 的每个非零双側理想里.

**10. 綫性变換的稠密环** 关于有限維向量空間的綫性变換环的一些結果可扩张于綫性变換的任意稠密环. 我們知道,綫性变換的集合 $\mathfrak{A}$ 是在有限拓扑里稠密的必須而且只須对于向量的任意两个有序的有限集合 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$, 其中 $x_i$ 是綫性无关的,有一个 $A \in \mathfrak{A}$ 存在使 $x_iA = y_i (i = 1, 2, \cdots, m)$.

首先要誹綫性变換的任意稠密环 $\mathfrak{A}$ 是自同态的一个不可約集合;亦即加法羣 $\mathfrak{R}$ 的子羣中,能够由 $\mathfrak{A}$ 映到自身內的子羣只有 $\mathfrak{R}$ 及 0. 这因为,令 $\mathfrak{S}$ 是这样一个子羣;如果 $\mathfrak{S} \neq 0$,则它含有一个向量 $x \neq 0$. 如果 $y$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意向量,则可找出一个 $A \in \mathfrak{A}$ 使 $xA = y$. 于是,$y \in \mathfrak{S}$. 因为 $y$ 是任意的,这就証明了 $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$.

关于稠密环的另一个显著的結果是: 羣 $\mathfrak{R}$ 的自同态中能与每个 $A \in \mathfrak{A}$ 可交換的只有純量乘法. 这是前章定理 2 的一个推广. 它的証明可逐句移用于現在情形.

要作出綫性变換的所有稠密环,并把它們分类是很困难的;但对于含有有限秩的非零变換的这样稠密环类的一个重要子类很多都可作出并予以分类. 本节余下部分及后两节将誹述这个类型的环的理論.

我們先給出作这样环的一个方法, 它将被証明是完全一般的方法. 我們从共軛空間 $\mathfrak{R}^*$ 的一个全子空間 $\mathfrak{R}'$ 开始, 并令 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 表示綫性变換 $A$ 的全体,这里要 $A$ 的折轉变換 $A^*$ 把 $\mathfrak{R}'$ 映到它自身內. 我們知道, $A^*$ 是綫性变換 $f \rightarrow fA^*$,这里 $fA^*(x) = f(xA)$. 令 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m$ 是 $\mathfrak{R}'$ 的任意元素, $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意向量, 并令 $F = \sum_1^m \phi_i \times u_i$. 我們知道, 后者意味着 $F$ 是綫性

变换 $x \to \sum_{1}^{m} \phi_i(x)u_i$. 故 $F$ 是有限秩的. 如果 $f$ 是任意綫性函数,则还有 $fF^*(x) = \sum\phi_i(x)f(u_i)$. 所以, $fF^*$ 是 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m$ 的一个綫性組合;因此 $F^* \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$. 这証明: $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 含有有限秩的非零变换. 令 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$, 它是含于 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的有限秩变换的全体.

我們今証 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 是在 $\mathfrak{L}$ 里稠密的. 这因为,令 $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 是綫性无关的,并令 $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意向量. 因为 $\mathfrak{R}'$ 是全子空間, 所以它含有使 $\phi_i(y_j) = \delta_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, m)$ 的綫性函数 $\phi_i$. 于是, 綫性变换 $F = \sum\phi_i \times u_i \in \mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$, 而 $y_iF = u_i(i = 1, 2, \cdots, m)$, 即得所求.

由 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的定义显然知这个集合是 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) (= \mathfrak{L}(\mathfrak{R}^*|\mathfrak{R}))$ 的一个子环. 同理, $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 是 $\mathfrak{L}$ 的一个子环. 今令 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的任意子环,它含有 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$. 因为 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 是稠密的, 故 $\mathfrak{A}$ 是稠密的. $\mathfrak{A}$ 含有有限秩的非零变换也是显然的.

反过来,令 $\mathfrak{A}$ 是使 $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F} \neq 0$ 的綫性变换的任意稠密环. 令 $\mathfrak{R}'$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的子空間,由

$$\mathfrak{R}' = \sum_{F \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}} \mathfrak{R}^* F^* \tag{7}$$

决定的,亦即 $\mathfrak{R}'$ 是含有空間 $\mathfrak{R}^*F^*$ 的 $\mathfrak{R}^*$ 的最小子空間,这里 $F \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}$. 则我們将証明 $\mathfrak{R}'$ 是全子空間,并且 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$. $\mathfrak{R}'$ 的全体可由下面引理得出,这引理自身是有趣的.

**引理 1** 如果 $\mathfrak{A}$ 是自同态的不可約環, 则 $\mathfrak{A}$ 的任意非零双側理想 $\mathfrak{B}$ 是不可約的.

証 如果 $x$ 是 $\mathfrak{A}$ 所作用的羣 $\mathfrak{R}$ 的一个非零元素, 则元素 $xB$ (这里 $B \in \mathfrak{B}$)的集合 $x\mathfrak{B}$ 是关于 $\mathfrak{A}$ 不变的一个子羣. 所以 $x\mathfrak{B} = \mathfrak{R}$, 或 $x\mathfrak{B} = 0$. 如果 $x\mathfrak{B} = 0$, 则带有这个性質的 $x$ 的集合 $\mathfrak{S}$ 不是 0. 但 $\mathfrak{S}$ 也是关于 $\mathfrak{A}$ 不变的一个子羣,所以 $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$. 于是, $\mathfrak{R}\mathfrak{B} = 0$, 这与 $\mathfrak{B} \neq 0$ 矛盾. 于是証得对于每个非零的 $x$, $x\mathfrak{B} = \mathfrak{R}$ 成立. $\mathfrak{R}$ 关于 $\mathfrak{B}$ 的不可約性是这个結果的一个直接推論.

今可証由 (7) 所决定的空間 $\mathfrak{R}'$ 是全子空間. 我們知道, $\mathfrak{J}$ 是 $\mathfrak{L}$ 里一个双側理想. 所以 $\mathfrak{J}\cap\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}$ 里一个非零双側理想; 故由引理 1 知: $\mathfrak{J}\cap\mathfrak{A}$ 是不可約的. 如果 $x\neq 0$ 属于 $\mathfrak{R}$, 則可找到一个 $F\in\mathfrak{J}\cap\mathfrak{A}$ 使 $xF\neq 0$. 我們还可找到一个綫性函数 $f$ 使 $f(xF)\neq 0$. 于是, $fF^*(x)\neq 0$ 而 $fF^*\in\mathfrak{R}'$. 所以, $\mathfrak{R}'$ 是全子空間.

今令 $A\in\mathfrak{A}$. 因为 $\mathfrak{J}\cap\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}$ 里一个理想, 故有下面的关系:

$$\mathfrak{R}'A^* = \sum\mathfrak{R}^*F^*A^* = \sum\mathfrak{R}^*(AF)^*\subseteq\mathfrak{R}'.$$

于是, 我們証明了 $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$. 要証其它包含关系 $\mathfrak{J}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})\subseteq\mathfrak{A}$, 就需要下面的引理.

**引理 2.** 令 $F$ 是有限秩的一个變換, 并令 $\mathfrak{R}F=[u_1, u_2, \cdots, u_m]$, 这里 $u_i$ 是綫性无關的, 則有一种方法而且只有一种方法把 $F$ 寫成 $\sum_1^m \phi_i\times u_i$, 这里 $\phi_i\in\mathfrak{R}^*$; $\phi_i$ 也是綫性无關的, 并且 $\mathfrak{R}'F^*=[\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m]$ 对于 $\mathfrak{R}^*$ 的每个全子空間 $\mathfrak{R}'$ 成立.

証 我們已知 (§ 9) $F$ 具有形状 $\sum_1^m \phi_i\times u_i$. 唯一性也在前面討論直接积时講过[1]; 所以引理的前一部分成立. 今令 $f\in\mathfrak{R}^*$, 則 $fF^*=\sum\phi_i f(u_i)$; 所以 $\mathfrak{R}^*F^*\subseteq[\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m]$. 另一方面, 如果 $\mathfrak{R}'$ 是稠密的, 則可在 $\mathfrak{R}'$ 里找出 $g_i$ 使 $g_i(u_j)=\delta_{ij}$. 于是, $g_iF^*=\phi_i$, 从而 $[\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m]\subseteq\mathfrak{R}'F^*$. 这完成了証明.

今令 $F\in\mathfrak{J}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$, 并写下 $F=\sum\phi_i\times u_i$, 这里 $u_i$ 构成 $\mathfrak{R}F$ 的一个基. 則 $\mathfrak{R}'F^*=[\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m]$, 而 $\phi_i\in\mathfrak{R}'$. 故对于适宜的 $F_j\in\mathfrak{A}\cap\mathfrak{J}$ 所有 $\phi_i\in\mathfrak{R}^*F_1^*+\mathfrak{R}^*F_2^*+\cdots+\mathfrak{R}^*F_n^*$. 今把前面引理用于 $F_j$, 并写 $F_j=\sum_k \psi_{jk}\times v_{jk}$, 这里 $v_{jk}$ 构成 $\mathfrak{R}F_j$ 的一个基, 而 $\psi_{jk}$ 构成 $\mathfrak{R}^*F_j^*$ 的一个基. 則对于 $\Delta$ 里适宜的 $\mu_{jk,i}$, $\phi_i=\sum_{j,k}\psi_{jk}\mu_{jk,i}$. 因为 $\mathfrak{A}$ 是稠密的, 而对于固定的 $j$, $v_{jk}$ 是綫性无关的, 所以可找到 $A_{ji}\in\mathfrak{A}$ 使

---

1) 見第七章 § 1 的中段及本章 § 8 的末段.

(8) $v_{jk}A_{ji} = \mu_{jk,i}u_i \quad (k=1, 2, \cdots; i=1, 2, \cdots, m)$.

今变换 $\sum_{j,i} F_j A_{ji} \in \mathfrak{I} \cap \mathfrak{A}$，而

$$\sum_{j,i} F_j A_{ji} = \sum_{j,i}\left(\sum_k \psi_{jk} \times v_{jk}\right) A_{ji} = \sum_{i,j,k} \psi_{jk} \times v_{jk} A_{ji}$$

$$= \sum_{i,j,k} \psi_{jk} \times \mu_{jk,i} u_i = \sum_i \left(\sum_{j,k} \psi_{jk}\mu_{jk,i}\right) \times u_i$$

$$= \sum \phi_i \times u_i = F.$$

故 $F \in \mathfrak{I} \cap \mathfrak{A}$. 这完成了下面結构定理的証明：

**定理 6.** 令 $\mathfrak{R}'$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的一个全子空間，并令 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 是綫性变换 $A$ 的全体，这里 $A$ 的折轉变换把 $\mathfrak{R}'$ 映到它自身內，則含有 $\mathfrak{I}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) = \mathfrak{I} \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 里的任意子环 $\mathfrak{A}$ 是綫性变换的一个稠密环，它含有有限秩的非零变換. 反过來，綫性变换的任意稠密环，它含有有限秩的非零变换时，都可这樣得出.

实际上我們的論証里建立的結果比定理所說的內容更多. 譬如，我們有由給定的环 $\mathfrak{A}$ 所决定的全子空間 $\mathfrak{R}'$ 的公式 (7). 由上面的討論还容易知道 $\mathfrak{I}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{R}$，它是映照 $\sum \phi_i \times u_i$ 的全体，这里 $\phi_i \in \mathfrak{R}'$，$u_i \in \mathfrak{R}$. 如果从 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 及 $\mathfrak{I}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 之間的一个环开始，則由 (7) 所决定的空間是 $\mathfrak{R}'$ 自身. 这些結果让讀者自己驗証.

这个主要定理还可借对偶空間說成更对称的形状. 要达到这个目的，令 $\mathfrak{R}$ 及 $\mathfrak{R}'$ 是关于双綫性形式 $g$ 对偶的，則得 $\mathfrak{R}'$ 到 $\mathfrak{R}^*$ 的一个全子空間 $\mathfrak{S}^*$ 上的自然等价：如果 $y' \in \mathfrak{R}'$，則 $y'R$ 是綫性函数 $g_{y'}(x) = g(y', x)$[1]. 如果 $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{S}^*|\mathfrak{R})$，則 $A' = RA^*R^{-1}$ 是 $\mathfrak{R}'$ 到它自身內的一个綫性变换. 我們叫 $A'$ 做 $A$ 关于 $g$ 的**折轉变換**. 与有限維情形一样，对于所有 $x \in \mathfrak{R}$ 及所有 $y' \in \mathfrak{R}'$，$A'$ 适合条件

(9) $$g(xA, y') = g(x, y'A').$$

反过来，令 $A$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意綫性变换，而对于 $A$ 存在有 $\mathfrak{R}'$ 里一个綫性变换 $A'$ 使(9)成立；則 $g_{y'}A^* = g_{y'A'} \in \mathfrak{S}^*$，而 $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{S}^*|\mathfrak{R})$. 故

1) 参看第五章 § 1.

$A'$ 是 $A$ 关于 $g$ 的折轉变换. 至此, $\mathfrak{L}(\mathfrak{S}^*|\mathfrak{R})$ 自然也可表示为 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$. 在这个环里, 有限秩的变换有形状 $\sum y'_i \times x_i$, 这里与通常一样, 它表示映照 $x \to \sum g(x, y'_i) x_i$. $\sum y'_i \times x_i$ 在 $\mathfrak{R}'$ 里的折轉变换是 $\sum y'_i \times' x_i$, 这里 $y'(\sum y'_i \times x_i) = \sum y'_i g(x_i, y')$. 所以, 集合 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 与(按同样方法定义的) $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R}')$ 在映照 $A \to A'$ 下对应.

至此可給出定理 6 利用对偶空間的說法.

**定理 6'.** 令 $\mathfrak{R}$ 及 $\mathfrak{R}'$ 是对偶向量空間, 并令 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 表示 $\mathfrak{R}$ 里綫性变换的全体, 它在 $\mathfrak{R}'$ 里有折轉变换. 則 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的任意子环, 它含有 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 时, 是 $\mathfrak{R}$ 里綫性变换的一个稠密环, 而这个环含有有限秩的非零变换. 反过來, 綫性变换的任意稠密环, 它含有有限秩的非零变换时, 都可这樣得出.

由这个說法显然 $\mathfrak{R}'$ 里折轉变换 $A'$ 的集合 $\mathfrak{A}'$ 是 $\mathfrak{R}'$ 里一个稠密环, 含有有限秩的变换. 映照 $A \to A'$ 是 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}'$ 上的一个反同构.

## 習 題 71

1. 令 $\mathfrak{R}$ 是 $\Delta$ 上向量空間带有一个可数基, 并令 $\mathfrak{A}$ 是綫性变换的全体, 这些变换关于这个基的陣的形状为

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

这里 $A$ 是一个有限陣. 証明: $\mathfrak{A}$ 是一个稠密环.

2. 令 $\mathfrak{R}$ 与第 1 題一样, 并令 $\mathfrak{R}'$ 是全子空間 $[\phi_1, \phi_2, \cdots]$, 这里 $\phi_i(e_j) = \delta_{ij}$, 而 $(e_j)$ 是一个基. 証明: $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 必須而且只須它关于基 $(e_i)$ 的陣是行有限及列有限的.

3. 令 $U$ 及 $V$ 是 $\Phi$ 上 $\mathfrak{R}$ 里的綫性变换, 它們的陣是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

証明: 由 $U$ 及 $V$ 生成的代数 $\Phi[U, V]$ 是稠密的, 并且含有有限秩的变换.

4. 驗証: 如果向量 $(e_i)$ 与 $(\phi_i)$ 是相余的 $(\phi_i(e_k) = \delta_{ik})$, 則綫性变换 $e_{ik} = \phi_i \times e_k$ 适合陣单位的乘法表.

5. (李托夫(Litoff)). 証明: $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的任意有限子集合可嵌入一个子环里，这子环是与一个有限陣环 $\Delta_n$ 同构的。

6. 証明: $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{R}$ 的任意右理想的形状为 $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{R}$，这里 $\mathfrak{S}'$ 是 $\mathfrak{R}'$ 的一个子空間，而任意左理想的形状为 $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$，这里 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子空間(参看第八章，§§3, 4)。

7. 証明: $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 是单純的。

8. 証明: $A$ 在 $\mathfrak{R}'$ 里有一个折轉变換必須而且只須 $A$ 是 $\mathfrak{R}$ (賦予 $\mathfrak{R}'$-拓扑) 到它自身內的一个連續映照。

**11. 同构定理** 今来討論綫性变換的稠密环(它含有有限秩的非零变換)的同构問題。为着这个目的，我們使用結构定理的原来形状，亦即 $\mathfrak{A}$ 可夹在两个环之間如 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) \supseteq \mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$，这里 $\mathfrak{R}'$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的一个全子空間。我們已知[1] $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的每个右理想具有形状 $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{R}$，这里 $\mathfrak{S}'$ 是 $\mathfrak{R}'$ 的一个子空間。現在如果 $A$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意綫性变換，則 $(\sum \psi_i \times x_i)A = \sum \psi_i \times x_i A$。所以 $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{R}$ 实質上是 $\mathfrak{L}$ 里一个右理想，并且更是 $\mathfrak{A}$ 里一个右理想。如果 $\mathfrak{S}' = [\psi]$ 是 $\mathfrak{R}'$ 的一个一維子空間，則显然 $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{R}$ 是 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的一个极小右理想。因为含于 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 里的 $\mathfrak{A}$ 的任意右理想显然是 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的一个右理想，我們的說明指出: $[\psi] \times \mathfrak{R}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个极小右理想。

今可将关于 $\mathfrak{A}$ 的下面事实列出: 1) $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{R}$ 里自同态的一个不可約环，2) 与 $\mathfrak{A}$ 里每个 $A$ 可交換的自同态的集合是純量乘法的集合，及 3) $\mathfrak{A}$ 拥有极小右理想。这些結果使我們在第八章的 §5 里关于有限維向量空間的綫性变換的环的同构可移用于現在情形。

今将前面使用的論証摘要如下: 令 $\mathfrak{J}$ 是 $\mathfrak{A}$ 里一个极小右理想，并令 $x$ 是使 $x\mathfrak{J} \neq 0$ 的一个向量，則 $x\mathfrak{J}$ 是 $\mathfrak{R}$ 由 $\mathfrak{A}$ 映到它自身內的一个子羣。于是 $x\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$。我們可如前推得映照 $\chi: B \to xB$ 是 $\mathfrak{J}$ 到 $\mathfrak{R}$ 上的一个算子同构。

今考虑两个同构环 $\mathfrak{A}_i (i = 1, 2)$，这里 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_i'|\mathfrak{R}_i) \supseteq \mathfrak{A}_i \supseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{R}_i'|\mathfrak{R}_i)$，而 $\mathfrak{R}_i$ 是 $\Delta_i$ 上一个向量空間，$\mathfrak{R}_i'$ 是 $\mathfrak{R}_i$ 里綫性函数的一个全子空間。令 $A_1 \to A_1\phi$ 是 $\mathfrak{A}_1$ 到 $\mathfrak{A}_2$ 上的一个同构。在 $\mathfrak{A}_1$ 里选取一

---

1) 参看习題 71 的第 6 題。

个极小右理想 $\mathfrak{I}_1$，并令 $\mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}_1\phi$. 令 $\psi_i$ 是 $\mathfrak{I}_i$ 到如上决定的 $\mathfrak{R}_i$ 内的一个算子同构，则由第八章的 §5 的論証知，映照 $U = \psi_1^{-1}\phi\psi_2$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 上的一个 1—1 半綫性变换，并且对于 $\mathfrak{A}_1$ 里所有 $A_1$，

$$A_1\phi = U^{-1}A_1U \tag{10}$$

成立. 特别是，我們与前一样知，基可除环是同构的，并且 $\mathfrak{R}_1$ 与 $\mathfrak{R}_2$ 有相同的維数.

在有限情形需要説的就是这样. 但在无限情形应該增加一个重要說明. 这是关于半綫性变换 $U$ 的折轉变换. 今来定义对于任意半綫性变换的这个概念.

令 $S$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 内的任意半綫性变换，并令 $s$ 是与 $S$ 相伴的 $\Delta_1$ 到 $\Delta_2$ 上的同构. 則对于任意 $x_1 \in \mathfrak{R}_1$，$(\alpha x_1)S = \alpha^s(x_1S)$. 今令 $f(x_2)$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 里任意綫性函数，并命

$$g(x_1) = f(x_1S)^{s^{-1}},$$

則 $g$ 显然是 $\mathfrak{R}_1$ 上一个綫性函数. 我們还可直接驗証：映照 $S^*: f \to g$ 是 $\mathfrak{R}_2^*$ 到 $\mathfrak{R}_1^*$ 内带有相伴同构 $s^{-1}$ 的一个半綫性变换. 我們叫 $S^*$ 做 $S$ 的**折轉**. 如同綫性变换，

$$(S_1S_2)^* = S_2^*S_1^*. \tag{11}$$

由此可推得，如果 $S$ 有逆变换 $S^{-1}$（$\mathfrak{R}_2$ 到 $\mathfrak{R}_1$ 上带有同构 $s^{-1}$ 的一个半綫性变换），因而 $SS^{-1} = 1 = S^{-1}S$，則 $S^*(S^{-1})^* = 1 = (S^{-1})^*S^*$. 于是，$S^*$ 也有一个逆变换. 这等价于説：如果 $S$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 上的一个 1—1 映照，則 $S^*$ 是 $\mathfrak{R}_2^*$ 到 $\mathfrak{R}_1^*$ 上的 1—1 映照. 我們观察到，$F_1$ 是 $\mathfrak{R}_1$ 里有限秩的一个变换必須而且只須 $U^{-1}F_1U$ 是 $\mathfrak{R}_2$ 里有限秩的变换. 故 $\phi$ 把 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}_1'|\mathfrak{R}_1)$ 映到 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}_2'|\mathfrak{R}_2)$ 上. 如果引用关于 $\mathfrak{R}_i'$ 的公式(7)，我們可驗証：$U^*$ 把 $\mathfrak{R}_2'$ 映到 $\mathfrak{R}_1'$ 上. 这因为

$$\mathfrak{R}_2'U^* = \sum\mathfrak{R}_2^*F_2^*U^* = \sum\mathfrak{R}_2^*U^*F_1^* = \sum\mathfrak{R}_1^*F_1^* = \mathfrak{R}_1'.$$

所以我們可述出下面的同构定理：

**定理 7.** 令 $\mathfrak{R}_i(i = 1, 2)$ 是 $\Delta_i$ 上一个向量空間，并令 $\mathfrak{R}_i'$ 是 $\mathfrak{R}$ 上綫性函數的一个全子空間. 設 $\mathfrak{A}_i$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_i'|\mathfrak{R}_i)$ 的一个子环含有 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}_i'|\mathfrak{R}_i)$，并令 $\phi$ 是 $\mathfrak{A}_1$ 到 $\mathfrak{A}_2$ 上的一个同构，則有 $\mathfrak{R}_1$ 到 $\mathfrak{R}_2$ 上一个 1—1 半綫性变换 $U$ 存在，它的折轉把 $\mathfrak{R}_2'$ 映到 $\mathfrak{R}_1'$ 上并使对于所

有 $A_1 \in \mathfrak{A}_1$, $A_1\phi = U^{-1}A_1U$.

这个定理有許多有趣的推論，这里給出一个，是习題 66 的第 5 題的推广.

系 1. 令 $\mathfrak{R}$ 是域 $\Phi$ 上一个向量空間，并令 $\mathfrak{R}'$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 的一个全子空間，則保持心的元素不變的 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的每个自同構是內自同構.

証 显然 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 含有純量乘法的集合 $\Phi_l$. 又因为与 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的所有元素可交換的自同态只是純量乘法，所以集合 $\Phi_l$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的心. 如果 $A \to A\phi$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 里一个自同构，則有一个半綫性变換 $U$ 存在使 $A\phi = U^{-1}AU$. 如果 $u$ 是 $\Phi_l$ 里相伴自同构，則 $U^{-1}\alpha_l U = (\alpha^u)_l$. 今假定对于所有 $\alpha$, $\alpha_l\phi = \alpha_l$, 則 $U^{-1}\alpha_l U = \alpha_l\phi = \alpha_l$. 所以，$\alpha_l = (\alpha^u)_l$; 因此 $u = 1$. 故 $U$ 是綫性变换. 因为 $U^*$ 把 $\mathfrak{R}'$ 映到它自身內，故由定义得 $U \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$. 因此 $\phi$ 是內自同构.

这个結果含有下面的特殊情形：

**系 2.** 域上一个向量空間的綫性變換的環 $\mathfrak{L}$ 的每个自同構保持心的元素不變，則必是內自同構.

## 習 題 72

1. 令 $\Delta$ 是任意可除环，具有下面的性质：$\Delta$ 里自同构能保持心的元素不变，則这些自同构都是內自同构. 証明：如果 $\mathfrak{R}$ 是 $\Delta$ 上一个向量空間，則环 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的每个自同构，它保持心的元素不变时，必是內自同构.

**12. 反自同构与純量积** 現在考虑求綫性变換的稠密环(它含有有限秩非零变換的)能拥有一个反自同构的条件的問題. 这里使用結构定理的第二种說法較为方便，亦即給定 $\mathfrak{A}$ 作为 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的一个子环含有 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 的，这里 $\mathfrak{R}$ 及 $\mathfrak{R}'$ 是关于双綫性形式 $g$ 对偶的. 引入与 $\Delta$ 反同构的可除环 $\Delta'$, 并令 $\alpha \to \alpha'$ 是 $\Delta$ 到 $\Delta'$ 上的一个固定反同构. 如果取 $x\alpha' = \alpha x$, 則 $\mathfrak{R}$ 可看做 $\Delta'$ 上一个右向量空間. 同理，如果取 $\alpha' x' = x'\alpha$, 則 $\mathfrak{R}'$ 可看做 $\Delta'$ 上一个左向量空間.

今設 $A \to A\Psi$ 是 $\mathfrak{A}$ 里一个反自同构. 如果 $A'$ 表示 $A$ 关于 $g$

的折轉，則 $A \to A'$ 是 $\mathfrak{A}$ 到一个环 $\mathfrak{A}'$ 上的一个反同构，并且 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R}') \supseteq \mathfrak{A}' \supseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R}')$. 所以，映照 $A' \to A\Psi$ 是 $\mathfrak{A}'$ 到 $\mathfrak{A}$ 上的一个同构. 故由同构定理知，有（$\Delta'$ 上）左向量空間 $\mathfrak{R}'$ 到左向量空間 $\mathfrak{R}$ 上的一个半綫性变換 $V$ 存在使对于所有 $A \in \mathfrak{A}$,

$$A\Psi = V^{-1}A'V \tag{12}$$

成立. 半綫性变換 $V$ 可用于定义 $\mathfrak{R}$ 里一个純量积；这因为，我們可令

$$h(x, y) = g(x, yV^{-1}). \tag{13}$$

于是，显然有

$$h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y),$$
$$h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2),$$
$$h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y).$$

再則

$$\begin{aligned} h(x, \alpha y) &= g(x, (\alpha y)V^{-1}) = g(x, \alpha^{v^{-1}}(yV^{-1})) \\ &= g(x, (yV^{-1})\alpha^{v^{-1}\iota^{-1}}) = g(x, yV^{-1})\alpha^{v^{-1}\iota^{-1}} \\ &= h(x, y)\alpha^{v^{-1}\iota^{-1}}, \end{aligned}$$

这里 $v$ 是与 $V$ 相伴的 $\Delta'$ 到 $\Delta$ 上的同构. 因为 $v^{-1}$ 是 $\Delta$ 到 $\Delta'$ 上的一个同构，而 $\iota^{-1}$ 是 $\Delta'$ 到 $\Delta$ 上的一个反同构，$v^{-1}\iota^{-1}$ 是 $\Delta$ 里一个反自同构. 命 $\bar{\alpha} = \alpha^{v^{-1}\iota^{-1}}$；于是，$h(x, \alpha y) = h(x, y)\bar{\alpha}$，而 $h$ 是关于 $\alpha \to \bar{\alpha}$ 的 $\mathfrak{R}$ 里一个純量积.

$g$ 的非退化性与 $V$ 的性質易知可推得 $h$ 的非退化性. 所以，如果取 $x\bar{\alpha} = \alpha x$，而把 $\mathfrak{R}$ 看作 $\Delta$ 上一个右向量空間，則 $\mathfrak{R}$ 是关于 $h$ 与它自身对偶. 次証：$\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$ 的一个子环含有 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$. 这因为，如果 $A \in \mathfrak{A}$，則

$$\begin{aligned} h(xA, y) &= g(xA, yV^{-1}) = g(x, yV^{-1}A') \\ &= g(x, yV^{-1}A'VV^{-1}) = g(x, yA\Psi V^{-1}) \\ &= h(x, yA\Psi). \end{aligned}$$

故 $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$，并且它关于 $h$ 的折轉是給定的反同构下的象 $A\Psi$. 另一方面，令 $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$，則

$$g(xF, y') = h(xF, y'V) = h(x, y'VF\Psi)$$

$$= h(x, y'VF\Psi V^{-1}V)$$

$$= g(x, y'VF\Psi V^{-1});$$

所以 $F$ 有关于 $g$ 的一个折轉，并且 $F\in\mathfrak{A}$. 所以，我們証明了 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})\supseteq\mathfrak{A}\supseteq\mathfrak{F}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$，并且 $A\to A\Psi$ 是关于 $h$ 的折轉映照.

我們还未把 $A\Psi\in\mathfrak{A}$ 的事实完全利用. 下面将指出这个条件可推得 $h(x, y)$ 是一个**弱厄米特純量积**，亦即存在有 $\mathfrak{R}$ 到它自身上一个1—1 半綫性变换 $Q$ 使对于所有 $x, y\in\mathfrak{R}$,

$$h(x, y) = \overline{h(y, xQ)} \tag{14}$$

成立. 考虑映照 $y_1\times x_1$，亦即 $x\to h(x, y_1)x_1$. 我們知道，这个映照属于 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$，并且它的折轉是 $y\to y_1h(x_1, y) = h(x_1, y)^a y_1$，这里 $\alpha\to\alpha^a$ 是 $\alpha\to\bar{\alpha}$ 的逆映照. 因为折轉映照把 $\mathfrak{A}$ 映到它自身內，所以，$y\to h(x_1, y)^a y_1$ 与綫性变换 $\sum u_i\times v_i$ 重合. 由簡单的論証指出，我們的变换实质上有 $z_1\times y_1$ 的形状. 所以对于所有 $y$, $h(x_1, y)^a=h(y, z_1)$ 成立. 如果两端取上横綫，则得 $h(x_1, y)=\overline{h(y, z_1)}$. 因此对于每个 $x$ 有一个 $z$ 存在，使对于所有 $y$, $h(x, y)=\overline{h(y, z)}$ 成立. 因为 $h$ 的非退化性可推得 $z$ 是由 $x$ 唯一决定的；所以 $x\to z$ 是 $\mathfrak{R}$ 到它自身內的一个映照 $Q$. $Q$ 显然是一个自同态. 再則

$$h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y) = \alpha\overline{h(y, xQ)}$$

$$= \overline{h(y, xQ)\alpha^a} = \overline{h(y, \alpha^{a^2}(xQ))};$$

所以 $(\alpha x)Q=\alpha^{a^2}(xQ)$，而 $Q$ 是带有相伴自同构 $a^2$ 的半綫性变换. $h$ 的非退化性可推得 $Q$ 是 1—1 的. 最后因为 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$ 的每个元素是一个折轉映照，故 $Q$ 是到 $\mathfrak{R}$ 上的一个映照. 这証明 $h$ 是弱厄米特純量积.

反过来，設 $h$ 是 $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}$ 里一个非退化的弱厄米特純量积. 令 $A\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$，并且令 $A'$ 現在表示它关于 $h$ 的折轉映照，則

$$\overline{h(xA', y)} = h(yQ^{-1}, xA') = h(yQ^{-1}A, x)$$

$$= \overline{h(x, yQ^{-1}AQ)}.$$

所以 $h(xA', y) = h(x, yQ^{-1}AQ)$. 这証明 $A'\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$，并且

$A'' = Q^{-1}AQ$. 所以 $A \to A'$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$ 的一个反自同构. 上面的結果可总結如次：

**定理 8.** 令 $\mathfrak{A}$ 是 $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}$ 里綫性變換的一个稠密環，它含有有限秩的非零变换. 設 $\mathfrak{A}$ 拥有一个反自同构 $A \to A\Psi$，則 $\Delta$ 有一个反自同构 $\alpha \to \bar{\alpha}$，并且 $\mathfrak{R}$ 里存在一个非退化的弱厄米特純量積使 $\mathfrak{A}$ 夾在 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$ 与 $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$ 之間，并且使 $A \to A\Psi$ 与关于 $h$ 的折轉映照重合. 反过來，如果 $\mathfrak{R}$ 有一个非退化的弱厄米特純量積，則 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$ 里折轉映照是一个反自同构.

其次，我們添上条件：$A \to A'(= A\Psi)$ 是对合的，亦即对于所有 $A \in \mathfrak{A}$, $A'' = A$ 成立. 由上面导出的关系 $A'' = Q^{-1}AQ$，这个条件等价于：对于所有 $A \in \mathfrak{A}$, $Q^{-1}AQ = A$. 后者能够成立必須而且只須 $Q = \mu_l$ 是一个純量乘法. 因此 $A \to A'$ 是对合的必須而且只須对于一个固定的 $\nu(= \bar{\mu})$ 及所有 $x, y$,

$$h(x, y) = \nu\overline{h(y, x)}. \tag{15}$$

今将指出，我們可以适宜的倍数 $s(x, y) = h(x, y)\tau$ 代替 $h$，这个 $s(x, y)$ 是厄米特純量积或是斜厄米特純量积. 首先注意到 (15) 的迭代給出

$$h(x, y) = \nu\overline{\overline{\nu h(x, y)}}\bar{\nu}. \tag{16}$$

如果选取 $x, y$ 使 $h(x, y) = 1$，則得 $\bar{\nu} = \nu^{-1}$. 如果 $\nu = -1$，則 $h$ 是斜厄米特純量积，沒有什么可証了. 如果 $\nu \neq -1$，命 $\tau = (\nu + 1)^{-1}$，并驗証,

$$\tau^{-1}\bar{\tau} = (\nu + 1)(\bar{\nu} + 1)^{-1} = (\nu + 1)(\nu^{-1} + 1)^{-1} = \nu.$$

如果 $s(x, y) = h(x, y)\tau$，則可驗証 $s$ 是一个純量积，它的反自同构是 $\alpha \to \alpha^* \equiv \tau^{-1}\bar{\alpha}\tau$. 还有

$$\begin{aligned} s(y, x)^* &= \tau^{-1}\overline{s(y, x)}\tau = \tau^{-1}\bar{\tau}\overline{h(y, x)}\tau \\ &= \nu\overline{h(y, x)}\tau = h(x, y)\tau = s(x, y); \end{aligned}$$

所以 $s$ 是厄米特純量积. 故証明了下面的定理.

**定理 9.** 令 $\mathfrak{A}$ 及 $\Psi$ 与定理 8 一樣，并設 $\Psi^2 = 1$. 則 $\Delta$ 有一个对合反自同构，并且 $\mathfrak{R}$ 里存在有一个非退化的厄米特或斜厄米特

純量積 $s$ 使 $A \to A\Psi$ 与關于 $h$ 的折轉映照重合。反过來，如果 $\mathfrak{R}$ 有一个非退化的厄米特或斜厄米特純量積，則 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$ 里折轉映照是一个反自同构。

还得說明的是：由习題 42 的第 4 題知，我們可設这个純量积是厄米特的或斜称的。只有 $\Delta = \Phi$ 是一个域时，后一个可能性才成立。

## 習 題 73

1. 令 $h$ 是 $\mathfrak{R}$ 里一个非退化的厄米特或斜厄米特純量积。証明：如果 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个有限維非迷向子空間[1]，則 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{S}'$，这里 $\mathfrak{S}'$ 是 $\mathfrak{S}$ 的正交余空間。

2. (黎卡特(Rickart))。令 $U$ 是一个綫性变換，如果 $h(xU, yU) = h(x, y)$ 对于所有 $x, y \in \mathfrak{R}$ 成立，則 $U$ 叫做 $h$ 单式的綫性变換。单式变換 $I$ 使 $I^2 = 1$，則叫做一个对合。設 $\Delta$ 的特征数 $\neq 2$，証明：如果 $I$ 是一个对合，則存在有一个分解 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_+ \oplus \mathfrak{R}_-$，这里 $\mathfrak{R}_+$ 及 $\mathfrak{R}_-$ 都是非迷向的及正交的，并且对于 $x \in \mathfrak{R}_+$，$xI = x$，而对于 $x \in \mathfrak{R}_-$，$xI = -x$。

**13. 叔尔引理．一般稠密性定理** 关于綫性变換的稠密环得到的結果，它們的应用范围很广泛。今将指出，这些結果应用于自同态的任意不可約环。这因为我們将証明：綫性变換的稠密环与自同态的不可約环这两个概念是完全等价的。我們已知綫性变換的每个稠密环是自同态的一个不可約集合；所以剩下的是証明逆定理。

故設 $\mathfrak{A}$ 是交換羣 $\mathfrak{R}$ 的自同态的一个不可約环。我們第一步驟是引入一个可除环 $\Delta$；关于 $\Delta$，$\mathfrak{R}$ 是一个向量空間而 $\mathfrak{A}$ 是綫性变換的一个集合。因为有下面的基本引理，故可取这个步驟。

**叔尔引理** 如果 $\mathfrak{A}$ 是交換羣 $\mathfrak{R}$ 里自同態的一个不可約環，則与每个 $A \in \mathfrak{A}$ 可交換的自同態的環 $\mathfrak{B}$ 是一个可除環。

証　令 $B$ 是 $\mathfrak{B}$ 里任意非零元素，則象羣 $\mathfrak{R}B$ 关于 $\mathfrak{A}$ 是不变的。这可由 $B$ 与 $\mathfrak{A}$ 的元素的可交換性直接推出。因为 $\mathfrak{R}B \neq 0$，$\mathfrak{A}$ 的不可約性可推得 $\mathfrak{R}B = \mathfrak{R}$。次令 $\mathfrak{N}$ 是自同态 $B$ 的核。我們又可驗証 $\mathfrak{N}$ 是一个 $\mathfrak{A}$-子羣。又因为 $B \neq 0$，$\mathfrak{N} \neq \mathfrak{R}$。所以，$\mathfrak{N} = 0$。这

---

1) 如果 $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}' = 0$，則 $\mathfrak{S}$ 是非迷向的。参看第五章，§7。

意味着 $B$ 是 1—1 的．故知 $B$ 是 $\mathfrak{R}$（在它自身上）的一个自同构．逆映照 $B^{-1}$ 也是一个自同态． 显然 $B^{-1}$ 与每个 $A\in\mathfrak{A}$ 可变换，所以 $B^{-1}\in\mathfrak{B}$．故我們已証得：$\mathfrak{B}$ 的每个 $B\neq 0$ 在 $\mathfrak{B}$ 里有一个逆映照．故 $\mathfrak{B}$ 是一个可除环．

因为自同态的环 $\mathfrak{B}$ 是一个可除环含有恆等自同态，羣 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{B}$ 合起来构成一个右向量空間．这里純量积 $xB(x\in\mathfrak{R}, B\in\mathfrak{B})$ 只是 $x$ 在 $B$ 下的象． 为着与前面強調左向量空間一致起見，今将把 $\mathfrak{R}$ 看作一个左向量空間． 令 $\Delta$ 表示与 $\mathfrak{B}$ 反同构的一个可除环． 如果 $\beta\to B$ 是 $\Delta$ 到 $\mathfrak{B}$ 上的一个一定的反同构，积 $\beta x = xB$ 轉移 $\mathfrak{R}$ 为 $\Delta$ 上一个左向量空間． 显然 $\mathfrak{A}$ 的元素是 $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}$ 里（或 $\mathfrak{B}$ 上 $\mathfrak{R}$ 里）的綫性变换．我們还知道，与每个 $A\in\mathfrak{A}$ 可变换的自同态只是純量乘法．

由現在起，假定 $\mathfrak{A}\neq 0$．如果 $\mathfrak{N}$ 表示对于所有 $A$ 能使 $zA=0$ 的 $z$ 的集合，則 $\mathfrak{N}\neq\mathfrak{R}$．但 $\mathfrak{N}$ 关于 $\mathfrak{A}$ 是一个不变子羣，所以 $\mathfrak{N}=0$．这个結果意味着：如果 $x$ 是任意非零向量，則有一个 $A\in\mathfrak{A}$ 存在使 $xA\neq 0$．再則固定向量 $x$ 的象 $xA$ 的集合 $x\mathfrak{A}$ 显然是一个 $\mathfrak{A}$-子羣．又由 $\mathfrak{A}$ 的不可約性推得 $x\mathfrak{A}=\mathfrak{R}$．所以，如果 $x\neq 0$ 及 $y$ 是任意向量，則存在有一个 $A\in\mathfrak{A}$ 使 $xA=y$． 故証得 $A$ 是 1-重传递的，它的定义如次：

設 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{R}$ 里綫性变换的一个集合，如果給定 $l\,(\leqslant k)$ 个向量的任意两个有序集合 $(x_1, x_2, \cdots, x_l)$，$(y_1, y_2, \cdots, y_l)$，其中 $x_i$ 是綫性无关的，則 $\mathfrak{A}$ 里有一个 $A$ 存在使 $x_iA=y_i\,(i=1, 2, \cdots, l)$ 时，集合 $\mathfrak{A}$ 叫做 **$k$-重传递集合**．

我們継續作自同态的不可約集合的分析，而証 $\mathfrak{A}$ 是 2-重传递集合． 現在我們将使用下面的事实：純量乘法是能与 $\mathfrak{A}$ 里所有 $A$ 可变换的仅有自同态． 作为証明的准备，我們注意到：如果 1) $\mathfrak{A}$ 是 1-重传递的，及 2) 如果 $(x_1, x_2, \cdots, x_l)$ 是 $l\,(\leqslant k)$ 个綫性无关向量，則对于 $i=1, 2, \cdots, l$，$\mathfrak{A}$ 里存在有一个綫性变换 $E_i$ 使

$$x_jE_i = 0\quad (j\neq i),\quad 而\quad x_iE_i\neq 0,$$

則綫性变换的环是 $k$-重传递的． 这因为，如果 $E_i\,(i=1, 2, \cdots,$

$l$) 存在，则可在 $\mathfrak{A}$ 里找到一个 $B_i$ 使 $x_iE_iB_i=y_i$. 于是，$A=\sum E_iB_i$ 具有所需要的性質 $x_iA=y_i(i=1,2,\cdots,l)$. 今取 $l=2$，并且相反地假設 $\mathfrak{A}$ 里沒有 $E$ 使 $x_1E=0$，但 $x_2E\neq 0$. 如果 $B$ 是 $\mathfrak{A}$ 的任意元素使 $x_1B=0$；則也有 $x_2B=0$. 这个事实可推得对应 $x_1A\to x_2A$ 是单値的，这里 $A$ 在 $\mathfrak{A}$ 里变动. 这因为，如果 $x_1A=x_1A'$，而 $A$ 与 $A'$ 属于 $\mathfrak{A}$，則对于 $B=A-A'$ 有 $x_1B=0$. 所以，$0=x_2B=x_2(A-A')$ 而 $x_2A=x_2A'$. 今知象 $x_1\mathfrak{A}$ 的集合是整个空間 $\mathfrak{R}$. 显然这个映照也是一个同态. 所以它是 $\mathfrak{R}$ 的一个自同态. 如果 $C$ 是 $\mathfrak{A}$ 里任意綫性变換，則

$$(x_1A)C=x_1AC\to x_2AC=(x_2A)C,$$

而这指出映照 $x_1A\to x_2A$ 与 $C$ 可交換. 故这个映照是一个純量乘法，亦即存在有一个 $\beta\in\Delta$ 使对于所有 $A$，$x_2A=\beta(x_1A)$ 成立. 故对于所有 $A$，$(x_2-\beta x_1)A=0$. 于是，$x_2=\beta x_1$；这与 $x_1$ 及 $x_2$ 的綫性无关性矛盾.

我們最后的步驟是指出：$\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{L}$ 里是稠密的；或換句話說，$\mathfrak{A}$ 对于所有 $k$ 是 $k$-重传递的. 事实上我們将提高一步証明，亦即証明：綫性变換的任意 2-重传递环是稠密的. 設 $\mathfrak{A}$ 有这个性質，并假定我們已知对于一个特殊 $k$，$\mathfrak{A}$ 是 $k$-重传递的. 如果我們能証明：如果 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$ 是綫性无关向量，則 $\mathfrak{A}$ 里存在一个变換 $F$ 使 $i\leqslant k$ 时 $x_iF=0$，但 $x_{k+1}F\neq 0$，則这个結果可由归納法得出. 由归納法假設知，$\mathfrak{A}$ 里存在有 $E_j$ 使

$$x_iE_j=\delta_{ij}x_i\quad(i,j=1,2,\cdots,k).$$

命 $E=\sum_1^k E_i$，并先考虑 $x_{k+1}E\neq x_{k+1}$ 的情形，則 $x_{k+1}E-x_{k+1}\neq 0$，而在 $\mathfrak{A}$ 里存在一个 $A$ 使 $(x_{k+1}E-x_{k+1})A\neq 0$. 如果 $F=EA-A$，則

$$x_{k+1}F=x_{k+1}(EA-A)=(x_{k+1}E-x_{k+1})A\neq 0.$$

另一方面，$i\leqslant k$ 时，$x_iE=x_i$. 所以 $x_iEA=x_iA$ 而 $x_iF=0$. 次設 $x_{k+1}E=x_{k+1}$，則可断言有一个 $i\leqslant k$ 存在使 $x_{k+1}E_i$，$x_i$ 是綫性无关的；这因为，否則 $x_{k+1}E_i=\beta_ix_i$ 而

$$x_{k+1} = x_{k+1}E = \sum x_{k+1}E_i = \sum \beta_i x_i,$$

这与 $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$ 的綫性无关性矛盾。今令 $x_{k+1}E_i$ 与 $x_i$ 对于一个特殊的 $i$ 是綫性无关的，因为 $\mathfrak{A}$ 是 2-重传递的，则有一个 $B \in \mathfrak{A}$ 存在使 $x_{k+1}E_iB \neq 0$，但 $x_iB = 0$。如果命 $F = E_iB$，則得 $j \neq i$ 而 $\leqslant k$ 时 $x_jF = x_jE_iB = 0$，并且 $x_iF = 0$，但 $x_{k+1}F \neq 0$。这証明了这个断言，并且完成了下面定理的証明。

**一般稠密性定理** 令 $\mathfrak{A}$ 是交换羣 $\mathfrak{R}$ 里非零自同態的任意不可約環，并且把 $\mathfrak{R}$ 看作一个可除環 $\Delta$ 上的一个左向量空間，与每个 $A \in \mathfrak{A}$ 可交換的自同態的可除環成反同构，則 $\mathfrak{A}$ 是 $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}$ 里綫性變換的一个稠密環。

**14. 綫性变換的不可約代数** 前节定理也可应用于綫性变換的不可約代数，并在这个形状下它們給出羣表示論上若干基本的結果。今来导出这些結果。因此我們由域 $\Phi$ 上一个向量空間 $\mathfrak{R}$ 及 $\Phi$ 上 $\mathfrak{R}$ 里綫性变換的一个代数 $\mathfrak{A}$ 开端。$\mathfrak{A}$ 是一个代数的假定意味着 $\mathfrak{A}$ 在加法及乘法合成及用 $\Phi$ 的元素作的乘法（或 $\Phi_l$）下是封閉的。

今設 $\mathfrak{A}$ 作为綫性变換的一个集合是不可約的[1]，故可假定 $\mathfrak{R}$ 的子空間关于 $\mathfrak{A}$ 是不变的只有 $\mathfrak{R}$ 及 0，或等价地説，集合 $(\mathfrak{A}, \Phi_l)$ 是自同态的一个不可約集合。今将指出：如果 $\mathfrak{A} \neq 0$，則 $\mathfrak{A}$ 自身作为自同态的一个集合是不可約的。要証这一点，令 $x$ 是 $\mathfrak{R}$ 里任意非零向量，考虑向量 $xA$ 的集合 $x\mathfrak{A}$。因为 $\mathfrak{A}$ 是一个代数，$x\mathfrak{A}$ 是一个子空間。显然 $x\mathfrak{A}$ 也是 $\mathfrak{A}$-不变的。所以，$x\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$，或 $x\mathfrak{A} = 0$。如果 $x\mathfrak{A} = 0$ 成立，則使 $z\mathfrak{A} = 0$ 的向量 $z$ 的集合 $\mathfrak{N}$ 含有非零向量。显然 $\mathfrak{N}$ 是一个子空間，并且 $\mathfrak{N}$ 也是 $\mathfrak{A}$-不变的。所以 $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}$，而 $\mathfrak{A} = 0$，这与假設矛盾。故得对于任意非零的 $x$，$x\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$，并且这可直接推得 $\mathfrak{A}$ 是自同态的一个不可約集合。

至此可使用前节的結果了。为着这个目的，考虑与每个 $A \in \mathfrak{A}$ 可交換的自同态的环 $\mathfrak{B}$。显然 $\mathfrak{B} \supseteq \Phi_l$。其次观察到：$\mathfrak{B}$ 的元素是

---

1) 参看第四章，§ 1.

綫性变换. 这因为,令 $\alpha_l \in \Phi_l$, $B \in \mathfrak{B}$, 则对于任意 $A \in \mathfrak{A}$, 有

$$
\begin{aligned}
0 &= B(\alpha_l A) - (\alpha_l A)B = (B\alpha_l)A - \alpha_l(AB) \\
&= (B\alpha_l)A - \alpha_l(BA) = (B\alpha_l)A - (\alpha_l B)A \\
&= (B\alpha_l - \alpha_l B)A.
\end{aligned}
$$

所以, 如果 $B\alpha_l - \alpha_l B \neq 0$, 则可求得一个向量 $x$ 使 $y = x(B\alpha_l - \alpha_l B) \neq 0$. 于是, 对于所有 $A$, $yA = 0$, 这与 $\mathfrak{A}$ 的不可約性矛盾. 故对于每个 $\alpha_l$, $B\alpha_l = \alpha_l B$, 而 $B$ 是一个綫性变换. 故可証 $\mathfrak{B}$ 也是与 $\mathfrak{A}$ 的元素可交换的綫性变换的全体. 显然 $\mathfrak{B}$ 是綫性变换的一个代数. 由叔尔引理知, $\mathfrak{B}$ 是一个可除代数.

今依前节的程序, 并引入与 $\mathfrak{B}$ 反同构的可除代数 $\Delta$. 因为 $\mathfrak{B}$ 含有 $\Phi_l$, 我們可設 $\Delta \supseteq \Phi$. 我們还易知: $\mathfrak{R}$ 可依下面方式看作 $\Delta$ 上一个左向量空間: 用子集合 $\Phi$ 的元素所作純量乘法是原来的純量乘法. 于是, 主要的稠密性定理表明: $\mathfrak{A}$ 是 $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}$ 里的綫性变换的一个稠密集合.

今将把这个結果特殊化以得出关于綫性变换的代数上若干古典定理. 假定 $\Phi$ 是代数閉域, 而 $\mathfrak{R}$ 是 $\Phi$ 上有限維空間. 令 $\mathfrak{A}$ 是 $\Phi$ 上 $\mathfrak{R}$ 里綫性变换的一个不可約代数. 令 $B$ 是与 $\mathfrak{A}$ 的每个元素可交换的一个綫性变换, 则 $B$ 是与不可約集合 $(\mathfrak{A}, \Phi_l)$ 里每个元素可交换的一个自同态. 所以由叔尔引理知, 或者 $B$ 是 0, 或者 $B$ 是满秩变换. 今令 $\rho$ 是 $B$ 的特征多項式的一个根, 则 $C = B - \rho_l$ 与每个 $A \in \mathfrak{A}$ 可交换. 但 $\det C = 0$, 故 $C$ 是降秩的. 于是, $C = 0$, 而 $B = \rho_l$. 所以, 我們証明了与每个 $A \in \mathfrak{A}$ 可交换的綫性变换只是純量乘法. 对于綫性变换的不可約集合也可建立同样的結果. 譬如, 如果 $\Omega$ 是这样一个集合, 则 $\Omega$ 的封裹代数[1] $\mathfrak{A}$ 是綫性变换的一个不可約代数. 再则, 如果 $B$ 是与每个 $A \in \Omega$ 可交换的一个綫性变换, 则 $B$ 与每个 $A \in \mathfrak{A}$ 可交换. 于是, 我們可述下面的定理, 它是叔尔引理的最有用的特殊情形中的一个.

**定理 10.** 令 $\Omega$ 是代數閉域上有限維向量空間 $\mathfrak{R}$ 里綫性變換

1) 参看第四章, § 6.

的一个不可約集合，则与每个 $A\in\Omega$ 可交換的綫性變換只有純量乘法。

这个結果及稠密性定理的一个直接推論是：

**勃恩賽得定理** 如果 $\mathfrak{A}$ 是代數閉域上一个有限維向量空間里綫性變換的一个非零不可約代數，則 $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}$，这里 $\mathfrak{L}$ 是綫性變換的完全代數。

証 由定理 10′ 知，与 $A\in\mathfrak{A}$ 可交換的綫性变換的可除代数是 $\Phi_1$. 所以由稠密性定理知，$\mathfrak{A}$ 是 $\Phi$ 上 $\mathfrak{R}$ 里的綫性变換的一个稠密集合. 因为 $\mathfrak{R}$ 有 $\Phi$ 上一个有限基，这可推得 $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}$.

# 汉英名詞对照表

## 七　划



## 八　划

## 九 划



## 十 划

## 十一划

# 人名索引

## 2—5 划



## 6—10 划



## 11—16 划

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝抽象代数学　卷２　线性代数
作者＝Ｎ．贾柯勃逊
页数＝２５５
ＳＳ号＝１０５２６６３８
出版日期＝１９６０年０３月第１版